ÖR/ $\begin{bmatrix} 2x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = 0$ ise x değerini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 2x-9 & 4x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = 0$$

$$(2x-9)x + 4x \cdot 8 = 0$$

$$2x^2 - 9x + 32x = 0$$

$$2x^2 + 23x = 0$$

$$x(2x+23) = 0$$

$x=0$ veya $x = \frac{-23}{2}$ olur.

ÖR/ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ idempotent matris ve I_n, $n \times n$ mertebeli birim matris olmak üzere

$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{2}A$ olduğunu gösteriniz.

$B = I_n + A$ olsun. $BB^{-1} = I_n$ dir.

$B^{-1} = I_n - \frac{1}{2}A$

$$(I_n + A)(I_n - \tfrac{1}{2}A) = (I_n + A)I_n - (I_n + A)\tfrac{1}{2}A$$

$$= I_n + A - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\underbrace{A^2}_{A}$$

A idempotent $A^2 = A$

$$= I_n + A - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A$$

$$= I_n + A - A$$

$$= I_n$$

$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{2}A$ dır.

ÖR/ $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ terslenebilir bir matris olsun. $k\neq 0$ $(k\in\mathbb{R})$ için kA matrisinin tersi var mı? Varsa bulunuz

$$A=[a_{ij}]_{3\times3}$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_3 \quad \text{(terslenebilir matris)}$$

$$(kA)(kA)^{-1}=(kA).\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)$$

$$=\frac{k}{k}\underbrace{(AA^{-1})}=I_3$$

Buradan $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ dir.

ÖR/ A ve B kare iki matris olmak üzere AB^t-BA^t matrisi ters-simetrik olur mu?

$A^t=-A$ (ters simetrik matris)

$(AB^t-BA^t)^t=-(AB^t-BA^t)$ ise terssimetrik matris

$$(AB^t-BA^t)^t=(AB^t)^t-(BA^t)^t$$

$$=(B^t)^tA^t-(A^t)^tB^t$$

$$=BA^t-AB^t$$

$$=-(AB^t-BA^t)$$

AB^t-BA^t matrisi ters simetriktir.

ÖR/ $K = [k_{ij}]_{n\times n}$ ters simetrik matris olmak üzere

a) Eğer n tek ise K singülerdir. (Tekil)

b) $|Adj A| = |A|^{n-1}$

$A_{n\times n}$, A nın tersi yoksa A ya singüler veya tekil matris denir.

a) K ters simetrik matris

$K^t = -K$ dir.

$|K^t| = |-K| = (-1)^n |K|$

n tek olduğundan

$|K| = -|K| \Rightarrow 2|K| = 0$ o halde $|K| = 0$

ve sonuç olarak K singülerdir.

b) $A^{-1} = \dfrac{Adj A}{|A|} \Rightarrow Adj A = |A| . A^{-1}$

$|Adj A| = ||A| . A^{-1}| = |A|^n . |A^{-1}|$

$|Adj A| = |A|^n . \dfrac{1}{|A|}$

$|Adj A| = |A|^{n-1}$ dir

ÖR/ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$(AB)^{-1} = (CB)^t$ olsun. A^{-1} matrisini bulunuz.

$(AB)^{-1} = B^t C^t$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = B^t C^t$

$B^{-1} A^{-1} = B^t C^t$

$\underbrace{B (B^{-1}}\, A^{-1}) = B\, B^t C^t$

$A^{-1} = B (B^t C^t)$

$B^t C^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & -17 \\ 31 & -12 \end{bmatrix}$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin

a) satırca indirgenmiş formunu

b) // // eşolan formunu

c) rankını bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$H_{21}(-2), \quad H_{31}(-3)$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{satırca indirgenmiş form}}$

$H_2\left(\frac{1}{4}\right) \qquad H_{32}(-5) \qquad H_3(2)$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{satırca indirgenmiş eşolan formda}}$

$H_{12}(3) \qquad H_{23}(-1/2) \qquad H_{13}(-3/2)$

c) $r_A = 3$

ÖR/ A ve B $n \times n$ tipinde ortogonal ve ters simetrik matrisler olmak üzere, eğer $AB = BA$ ise AB matrisinin involut matris olduğunu gösteriniz.

$(AB)^2 = I_n$ olduğunu göstermeliyiz } involut matrik $A^2 = I_n$

$\left.\begin{array}{l} A^t = -A \\ B^t = -B \end{array}\right\}$ ters simetrik

$\left.\begin{array}{l} A^t = A^{-1} \\ B^t = B^{-1} \end{array}\right\}$ ortogonal $\quad AA^t = A.A^{-1} = I_n$, $\quad BB^t = BB^{-1} = I_n$

$$
\begin{aligned}
(AB)^2 = (AB)(AB) &= A(BA)B \\
&= A(AB)B \\
&= (AA)(BB) \qquad A, B \text{ ters simetrik} \\
&= A.(-A^t)B.(-B^t) \\
&= \underbrace{(AA^t)}(BB^t) \qquad \text{ortogonallik} \\
& \quad I_n . I_n \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

$(AB)^2 = I_n$ AB involut

ÖR/ $n \times n$ mertebeli A, B matrisleri için

$AB = BA$ ve $AB = 0$ olsun.

$$Tr\left[(A+B)^3\right] = Tr(A^3) + Tr(B^3)$$

olduğunu gösteriniz.

Not: İz ($Tr(\cdot)$) fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır.

a) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

b) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

c) $Tr(A^t) = Tr(A)$

d) $Tr(AB) = Tr(BA)$

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + 3A\underbrace{(AB)}_{0} + 3\underbrace{(AB)}_{0}B + B^3 \qquad (AB=0) \\ &= A^3 + B^3\end{aligned}$$

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3$$

$$Tr\left((A+B)^3\right) = Tr(A^3) + Tr(B^3)$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ reel değerli bir matris ve $\det A = |A| = 3$

olmak üzere aşağıdakileri bulunuz.

a) $|3A|$

b) $|2A^{-1}|$

c) $|2A^2|$

d) $|4(A^t)^{-1}|$

a) $|3A| = 3^3 . |A| = 27.3 = 81$

b) $|2A^{-1}| = 2^3\ |A^{-1}| = 8 . \frac{1}{|A|} = \frac{8}{3}$

c) $|2A^2| = 2^3 . |A^2| = 2^3 . |A|\,|A|$
$= 2^3 . 3 . 3$

d) $|4(A^t)^{-1}| = 4^3 |(A^t)^{-1}| = 4^3 . |A^{-1}| = 4^3 . \frac{1}{|A|} = \frac{4^3}{3}$

ÖR/ $AA^t = A^{-1}B$ ise $|B|$ yi $|A|$ cinsinden ifade ediniz.

$AA^t = A^{-1}B$ (A ile soldan çarp)

$A(AA^t) = A(A^{-1}B)$

$(AA)A^t = (AA^{-1})B$

$A^2A^t = B$ (her iki tarafın det al)

$|A^2A^t| = |B|$

$|A^2|\,|A^t| = |B|$

$|A|^2 . |A| = |B|$

$|A|^3 = |B| \Rightarrow |B| = |A|^3$ dır.

ÖR/

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & \cdots & & x^2 \\ x^2 & 0 & x^2 & \cdots & x^2 \\ x^2 & x^2 & 0 & \cdots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^2 & x^2 & x^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & \cdots & & x^2 \\ 0 & -x^2 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x^2 \end{vmatrix}_{n\times n} = x^2 \begin{vmatrix} -x^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x^2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= x^2 . (-x^2)^{n-1}$$

$$= x^2 . (-1)^{n-1} . x^{2(n-1)}$$

$$= (-1)^{n-1} . x^2 . x^{2n-2}$$

$$= (-1)^{n-1} . x^{2n}$$

ÖR/ B bir $n\times n$ involut matris olsun. $C = \frac{1}{2}(I+B)$ matrisinin idempotent olduğunu gösteriniz.

B involut ise $B^2 = I$ dır.

$$C^2 = \frac{1}{2}(I+B)(I+B) = \frac{1}{4}(I^2 + IB + BI + B^2)$$

$$= \frac{1}{4}(2I + 2B)$$

$$= \frac{1}{2}(I+B) = C$$

$C^2 = C$ olduğundan C idempotent olur.

ÖR/ $x+y-z=1$
$2x-y+z=2$
$7x+y+(m-6)z=m+2$

Lineer denklem sisteminin çözümünü m ye göre irdeleyiniz.

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & m-6 & m+2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & m+1 & m-5 \end{array}\right]$$
$$H_{21}(-2),\quad H_{31}(-7)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & m+1 & m-5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & m-5 \end{array}\right]$$
$$H_2\left(-\tfrac{1}{3}\right) \qquad H_{12}(-1),\quad H_{32}(6)$$

a) $m=5$ ise $r=2$ olur. $n=3$ (x,y,z)

$r<n \Rightarrow n-r=3-2=1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$x=1$ $\quad y-z=0$ $\quad z=k$
$y=k$
$z=k$

b) $m\neq 5$ olsun. Bu durumda $r=3$ $\quad n=3$

$r=n$ olduğundan tek çözüm vardır.

$m\neq 5$ $\quad m-5$ ile bölersek (3. satırı)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$H_{23}(1) \qquad x=1 \quad y=1 \quad z=1$$

ÖR/

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=a \\ 2x-3y+z=b \\ x-y=c \end{array}\right\}$$ Lineer denklem sisteminin çözümlü olmasını sağlayan a, b ve c değerleri arasındaki bağıntıyı belirleyiniz.

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & -3 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 7 & b-2a \\ 0 & -3 & 3 & c-a \end{array}\right]$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2a-b}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{a-c}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2a-b}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a+3b-7c}{21} \end{array}\right]$$

$H_2(-1/7)$

$H_3(-1/3)$

$\frac{a+3b-7c}{21}=0$ ise çözümün olacağı görülür.

ÖR/

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=m^2 \\ x+y+3z&=m \\ 3x+4y+7z&=8 \end{aligned}\right\}$$ lineer denk sistemi veriliyor.

a) Sistemin çözümünün olmaması için $m=?$

b) 〃 Sonsuz çözümünün olması için $m=?$

c) 〃 tek 〃 〃 $m=?$

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 1 & 1 & 3 & m \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 0 & -1 & 2 & m-m^2 \\ 0 & -2 & 4 & 8-3m^2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & -2 & -m+m^2 \\ 0 & -2 & 4 & 8-3m^2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2m-m^2 \\ 0 & 1 & -2 & -m+m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 8-2m-m^2 \end{array}\right]$$

$$8-2m-m^2=0 \qquad \begin{aligned} m&=2 \\ m&=-4 \end{aligned}$$

a) $r_A \neq r_{A;B}$ olmalı (Çözümsüz)

$m \neq 2$ ve $m \neq -4$

b) $r_A = r_{A;B} \overset{\text{sonsuz çözüm}}{<} n=3 \Rightarrow$ $m=-4$ veya $m=2$

c) $r_A = r_A = n = 3$ olmalı. Ancak $r_A=3$ olamaz. Tek çözüm yoktur.

ÖR/

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrisi verilsin.}$$

a) EkA ve det A yı bulunuz.

$$\text{EkA} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \underset{2-6}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} \\ \underset{1+6}{-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} & \underset{2-9}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} & \underset{-4-3}{-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$\text{EkA} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -14 + 7 = -7$$

b) $\text{EkA} . A = \det A . I_3$ olduğunu göster.

$$\text{EkA}.A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$