1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)\, x^{n+3}$ serisinin yakınsaklık aralığı ve bu aralıkta yakınsadığı fonk nedir?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , -1<x<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{x^3}{1-x} \qquad \text{türev al.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)\, x^{n+2} = \frac{3x^2(1-x)-(-1)x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)\, x^{n+3} = \frac{3x^3-2x^4}{(1-x)^2} \quad , -1<x<1$$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-3x}$ fonksiyonunun kuvvet serisi temsili ve bu serinin yakınsaklık aralığı nedir?

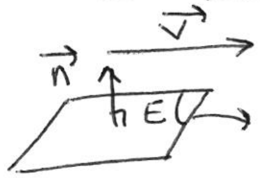
$$f(x) = x^2 \cdot \frac{1}{1-3x} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \qquad |3x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^{n+2} \qquad 3|x|<1$$

$$|x| < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

3) Hangi b reel sayısı için $\vec{v} = 4\vec{i} + b\vec{j} - 2\vec{k}$ vektörü $z = 2x+y+2$ düzlemine paralel olur?



$\vec{v} : (4, b, -2)$

$2x+y-z = -2 \qquad \vec{n} : (2, 1, -1)$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 8+b+2=0 \qquad b=-10$

4) I: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+7t \\ z = 2+t \end{cases}$ doğrusu ile $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \\ z = 3-3t \end{cases}$ doğrusu diktir

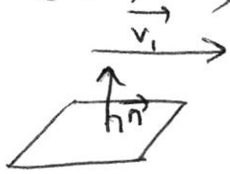
II: $\begin{cases} x = 4+6t \\ y = 5+2t \\ z = 2-4t \end{cases}$ doğrusu ile $3x+y-2z=1$ düzlemi paraleldir. Yukarıda verilen ifadelerin doğruluğunu belirleyiniz.

$\vec{V_1}: (2,7,1) \qquad \vec{V_2}: (-2,1,-3)$

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = -4+7-3=0$ diktir.

Doğrunun doğrultmanı

$\vec{V_1}: (6,2,-4)$ Düzlemin normali: $\vec{n}: (3,1,-2)$



$\vec{V_1} \cdot \vec{n} = 18+2+8 \neq 0$

I doğru, II yanlıştır.

5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}+(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

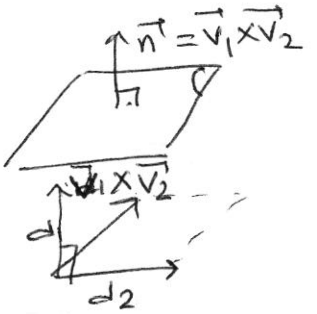
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0} \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{4 \cdot \frac{2}{3}}_{a} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{r}^{n-1} + \sum_{n=0} \underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)}_{a} \underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)}_{r}^{n-1}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{-1}{3}}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)} = \frac{31}{4}$$

6) $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+t \\ z = 3-t \end{cases}$ ve $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 5+t \\ z = 11 \end{cases}$

doğrularına paralel olan ve $P(1,2,3)$ noktasından geçen düzlemin denklemi nedir?



$\vec{V_1}: (4,1,-1)$ $\qquad \vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\vec{V_2} = (2,1,0)$ $\qquad \vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{n} = \vec{V_1} \times \vec{V_2}$ düzlemin normali $\qquad P(1,2,3)$

$1(x-1) - 2(y-2) + 2(z-3) = 0$

$x - 2y + 2z = 1 - 4 + 6 = 3$

$x - 2y + 2z = 3$

7) $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{6^n+1}{6^n} \right\}$ dizisi için aşağıdakilerden hangileri doğrudur.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{6^n}\left(1+\frac{1}{6^n}\right)}{\cancel{6^n}} = 1 \quad \text{yakınsak.}$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{6^n+1}{6^n} \right\} = 1 + \frac{1}{6^n} \quad \forall n \in N^+$$

$n \geq 1$

$$6^n \geq 6 \Rightarrow \frac{1}{6^n} \leq \frac{1}{6} \Rightarrow 1+\frac{1}{6^n} \leq 1+\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$1+\frac{1}{6^n} \leq \frac{7}{6} \rightarrow \text{EKÜS}$$

$$\frac{1}{6^n} > 0 \qquad 1+\frac{1}{6^n} > 1 \rightarrow \text{EBAS}$$

$$1 < 1+\frac{1}{6^n} \leq \frac{7}{6} \quad \text{sınırlı}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6^{n+1}+1}{6^{n+1}} - \frac{6^n+1}{6^n} = \frac{6^{n+1}+1}{6^{n+1}} - \frac{6^{n+1}+6}{6^{n+1}} = \frac{-5}{6^{n+1}} < 0$$

monoton azalan

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n.3^n}$ kuvvet serisi için aşağıdaki ifadelerden hangileri yanlıştır?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} \cdot \frac{n.3^n}{(x-2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+2)} |x-2|$$

$$= \frac{1}{3}|x-2| < 1$$

$$|x-2| < 3$$

$$-3 < x-2 < 3$$

$$-1 \leq x < 5$$

Uç noktalarda seriyi incele

$x = -1$ için

$$\sum \frac{(-3)^n}{n.3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}, \quad \underbrace{\frac{1}{n} \text{ ıraksak}}_{\text{Alterne seri testi uygulandığında şartlı yakınsak}}$$

$x = 5$

$$\sum \frac{3^n}{n.3^n} = \frac{1}{n} \quad \text{ıraksak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p \text{ serisi} \quad \begin{cases} p \leq 1 & \text{ıraksak} \\ p > 1 & \text{yakınsak} \end{cases}$$

9) Aşağıdaki serilerden kaç tanesi ıraksaktır?

I. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^4+4}{3+n^3}$ II. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+2}}$ III. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^4+2}$

IV. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ V. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}+1}$

I. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^4+4}{n^3+3}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+4}{n^3+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}\overset{n}{}\left(1+\frac{4}{n^4}\right)}{\cancel{n^3}\left(1+\frac{3}{n^3}\right)} = \infty$

ıraksak

II. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+2}}$ oran testi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{3^{n+3}} \cdot \frac{3^{n+2}}{4^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\cancel{27}\,3} \cdot \cancel{9} = \frac{4}{3} > 1 \quad \text{ıraksak}$$

III. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^4+2}$

limit karşılaştırma testi

$b_n: \sum \frac{1}{n^3}$ alalım yakınsak $p=3>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^4+2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3}{n^4+2} = 1 = L \neq 0, \infty$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^4+2}$ de yakınsak

IV: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ ile limit karşılaştırma yap

Yakınsak

V: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}+1}$ $\sum \frac{1}{n^{1/3}}$ limit karşılaştırma yap

ıraksak

10) $f(x)$ fonksiyonu $x=3$ ü içeren bir açık aralıkta her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki tabloda $f(x)$ fonksiyonunun ve bazı türevlerinin $x=3$ noktasında aldığı değerler verilmiştir. Bu değerlerden gerekli olanları kullanarak $f(3,1)$ sayısının yaklaşık değerini, merkezi 3 olan 2. mertebe Taylor polinomu yardımıyla hesapladığımızda elde edeceğimiz sonuç aşağıdakilerden hangisidir?

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
3	18	-6	4	-4

$$f(3,1) = f(x) + \frac{f'(x)(x-3)}{1!} + \frac{f''(x)(x-3)^2}{2!} + \frac{f'''(x)(x-3)^3}{3!}$$

$$= f(3) + \frac{f'(3)(3,1-3)}{1!} + \frac{f''(3)(3,1-3)^2}{2!} + \frac{f'''(3)(3,1-3)^3}{3!}$$

$$= 18 + (-6).(0,1) + \frac{4}{2!}(0,1)^2 - \frac{4}{3!}(0,1)^3$$

$$= 18 - \frac{6}{10} + 2.\frac{1}{10^2} - \frac{\cancel{2}}{3}(0,1)^3$$

$$= 18 - \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} - \frac{2}{3.10^3} = 17,42$$

11) I. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^3}$ II. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4n+1)^n}{(2n+3)^{2n}}$

serileri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

$\sum \frac{n^{1/n}}{n^3}$, $\sum \frac{1}{n^3}$ limit karşılaştırma yap

$$\sum \frac{\frac{n^{1/n}}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \sum n^{1/n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 = L \neq 0, \infty$$

yakınsak

II $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4n+1)^n}{(2n+3)^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{4n+1}{(2n+3)^2}\right]^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n+1}{(2n+3)^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n^2+12n+9}$$

$$= 0 < 1$$

yakınsak