

Birinci Basamaktan Lineer Diferansiyel Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Diferansiyel denklemler sistemlerini çözmek için değişik yöntemler vardır. Bu yöntemlerden biri olan türetme - yoketme yöntemi, diferansiyel denklemler sisteminde bilinmeyen fonksiyonların ardışık elenmesi ile tek bir değişkene bağlı bir diferansiyel denkleme indirgenesidir. Diferansiyel denklemler sistemleri, cebirsel denklemler sistemlerinin çözümünde kullanılan Cramer yöntemiyle de çözülebilir.

Birinci basamaktan Denklemler Sistemleri

Tanım; $x_1, x_2, \dots, x_n$, t gerçel değişkenine bağlı bilinmeyen fonksiyonları, $a_{ij}(t)$ ve $b_i(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) bilinmeyen fonksiyonları göstermek üzere birinci basamaktan bir diferansiyel denklemler sistemi

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

bağıntıları ile tanımlanır.

$a_{ij}(t)$ fonksiyonlarına sistemin katsayıları adı verilir. $b_i(t)$ fonksiyonlarının her biri sıfır fonksiyon ise sisteme homojen denklemler sistemi, $b_i(t)$ fonksiyonların hepsi birden sıfır fonksiyon değilse sisteme homojen olmayan sistem denir.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = A(t) X(t) + b(t) \text{ dir.}$$

Türetme - Yok etme Yöntemi

ÖR /
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{sistemi çözümler.} \\ &x_1, x_2 = ? + \text{değişken} \end{aligned}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 \text{ nin her iki yanının türevi}$$

alınırsa

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = 0 \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt} + x_1 = 0$$

Sabit katsayılı dif denklemleri elde edilir.

Şimdi bunu çözelim.

Bu sabit katsayılı
homojen denklemler sisteminin
genel çözümü

$$r^2 + 1 = 0 \quad \text{karakteristik polinom}$$

$$r_{1,2} = \pm i \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1$$

$$\underline{x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t \text{ olur.}}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 \quad \text{de yine yazarsak}$$

$$-c_1 \sin t + c_2 \cos t = -x_2$$

$$\underline{x_2 = c_1 \sin t - c_2 \cos t \text{ bulunur.}}$$

Böylece x_1 ve x_2 bulunmuş olur.

OR/

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + 2y + 2\sin t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{homojen olmayan} \\ &\text{denklemler sisteminin} \\ &\text{çözümünü} \end{aligned}$$

$x, y = ?$ bilinmeyen

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y \quad \text{türetelim.}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2 \frac{dx}{dt} - 3x + 2y + 2\sin t$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx}{dt} + 2x \text{ yaz.}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2 \frac{dx}{dt} - 3x + 2 \left(\frac{dx}{dt} + 2x \right) + 2 \sin t$$

4

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\cancel{2 \frac{dx}{dt}} - 3x + \cancel{2 \frac{dx}{dt}} + 4x + 2 \sin t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 2 \sin t \quad \text{Sabit katsayıları dif denklemleri}$$

$$r^2 - 1 = 0 \quad r_{1,2} = \pm 1$$

$$x_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

$$x_0 = A \sin t + B \cos t$$

$$x_0' = A \cos t - B \sin t$$

$$x_0'' = -A \sin t - B \cos t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 2 \sin t$$

$$-A \sin t - B \cos t - A \sin t - B \cos t = 2 \sin t$$

$$-2A = 2 \quad -2B = 0 \quad B = 0$$

$$A = -1$$

$$x_0 = -\sin t$$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \sin t \quad \checkmark$$

Şimdi y yi bulalım.

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$

$$-c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \cos t = -2(c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \sin t) + y$$

$$y = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^t - \cos t - 2 \sin t \quad \checkmark$$

Cramer yöntemi

115

Homojen olmayan lineer denklemler sistemleri, cebirsel denklemler sistemlerinin çözümünde uygulanan Cramer yöntemiyle çözülebilir.

$$\begin{aligned} \text{ÖR} / \quad \frac{dx}{dt} &= -2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + 2y + 2\sin t \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + 2y + 2\sin t \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{dif denklemler} \\ \text{sistemini Cramer} \\ \text{yöntemiyle çözelim.} \end{array}$$

$$\frac{d}{dt} = D \quad \text{türev operatörü}$$

$$Dx + 2x - y = 0$$

$$Dy + 3x - 2y = 2\sin t$$

$$(D+2)x - y = 0$$

$$3x + (D-2)y = 2\sin t$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+2 & -1 \\ 3 & D-2 \end{vmatrix} = (D+2)(D-2) + 3 = D^2 - 4 + 3 = D^2 - 1 \xrightarrow{\text{2 olduğu için}} 2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2\sin t & D-2 \end{vmatrix} = 2\sin t$$

x ve y
c1 ve c2 gibi
keyfi sabit
içerir.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} D+2 & 0 \\ 3 & 2\sin t \end{vmatrix} = (D+2)(2\sin t) = \frac{d}{dt}(2\sin t) = 2\cos t + 4\sin t$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2 \sin t}{D^2 - 1}$$

$$(D^2 - 1)x = 2 \sin t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 2 \sin t$$

$$\left. \begin{array}{l} x_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ x_o = -\sin t \end{array} \right\} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \sin t$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2 \cos t + 4 \sin t}{D^2 - 1}$$

$$(D^2 - 1)y = 2 \cos t + 4 \sin t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 2 \cos t + 4 \sin t$$

$$y_h = c_3 e^{-t} + c_4 e^t$$

$$y_o = A \cos t + B \sin t$$

$$y_o' = -A \sin t + B \cos t$$

$$y_o'' = -A \cos t - B \sin t$$

$$-A \cos t - B \sin t - A \cos t - B \sin t = 2 \cos t + 4 \sin t$$

$$-2A = 2 \quad A = -1$$

$$-2B = 4 \quad B = -2$$

$$y_o = -\cos t - 2 \sin t$$

$$y = c_3 e^{-t} + c_4 e^t - \cos t - 2 \sin t$$

$\Delta = D^2 - 1$ olduğu için x ve y

c_1 ve c_2 gibi keyfi sabit içerir. Bu

yüzden y deki c_3 ve c_4 , c_1 ve c_2 cinsinden yazılmalı.

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$

$$-c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \cos t = -2(c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \sin t) + c_3 e^{-t} + c_4 e^t - \cos t - 2 \sin t \quad \text{den}$$

c_3 ve c_4 'ü c_1 ve c_2 cinsinden yazalım.

$$c_1 e^{-t} + 3c_2 e^t - \cancel{\cos t} - 2 \cancel{\sin t} = c_3 e^{-t} + c_4 e^t - \cancel{\cos t} - 2 \cancel{\sin t}$$

$$c_3 = c_1, \quad c_4 = 3c_2 \quad \text{olur.}$$

$$y = c_3 e^{-t} + c_4 e^t - \cos t - 2 \sin t$$

$$y = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^t - \cos t - 2 \sin t \quad \text{olur.}$$