Sonsuz Diziler

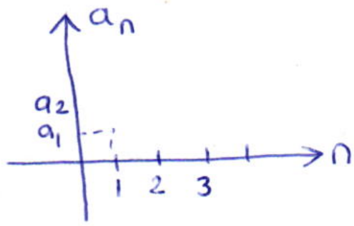
Bir dizi belli bir düzende yazılmış sayıların bir listesidir. Liste sonlu tane terimden oluşabileceği gibi, terimlerin sayısı sonsuzda olabilir.

Tanım: Reel sayıların bir dizisi, pozitif tamsayılar kümesi (veya onun bir alt kümesi) üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyondur.

Sonsuz bir dizi $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur.

Bir f dizisi, her bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına bir $f(n)$ sayısı karşılık getirecektir.

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = a_n$ ile gösterilir.



Bir dizi (a_n), $\{a_n\}$ veya $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ ile gösterilir.

$n \geq 1$ için

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots\right\}$$

$$b_n = \frac{n}{2^n} \qquad \{b_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3} \ldots\right\}$$

Bir $\{a_n\}$ dizisindeki a_n sayısına dizinin n th terimi denir.

a_1 1. terim

a_2 2. terim

$\vdots$

a_n n. terim dir.

Monoton diziler:

Tanım: Eğer her $n = 1, 2, 3 \ldots$ için

$a_n < a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ dizisi monoton artan dizi

aksi halde her $n = 1, 2, 3 \ldots$ için

$a_n > a_{n+1}$ ise monoton azalandır.

Artan veya azalan bir diziye monoton dizi denir.

ÖR/ $(a_n) = (3n-1) = (2, 5, 8, 11 \ldots)$ dizisi monoton artan

$(a_n) = (-2n) = (-2, -4, -6 \ldots)$ dizisi monoton azalan

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ dizisi gözönüne alındığında

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$a_n < a_{n+1}$ ise monoton artan , $a_n > a_{n+1}$ ise monoton azalan

$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ " " $\qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ "

veya $a_n - a_{n+1} < 0$ " $\qquad$ veya $a_n - a_{n+1} > 0$ "

$\frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{?}{<} 1$ veya $\frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{?}{>} 1$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$

$= 1 - \frac{1}{n^2+2n+1} < 1$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ olduğu için

$\{a_n\} = \frac{n}{n+1}$ dizisi monoton artandır.

Eğer $n \geq 1$ için $a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ azalmayan dizi

$n \geq 1$ için $a_n \geq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ artmayan dizi

ÖR/ $\{(n-1)(n-2)+7\}$ dizisi monoton azalmayan dizidir.

$n = 1, 2, 3 \ldots$

$\{7, 7, 9, 13, 19 \ldots\}$

ÖR/ $(a_n) = (n^2 - 4n)$ dizisinin monoton artan veya azalan olduğunu bulunuz.

$a_1 = 1^2 - 4.1 = -3$

$a_2 = 2^2 - 4.2 = -4$

$a_3 = 3^2 - 4.3 = -3$

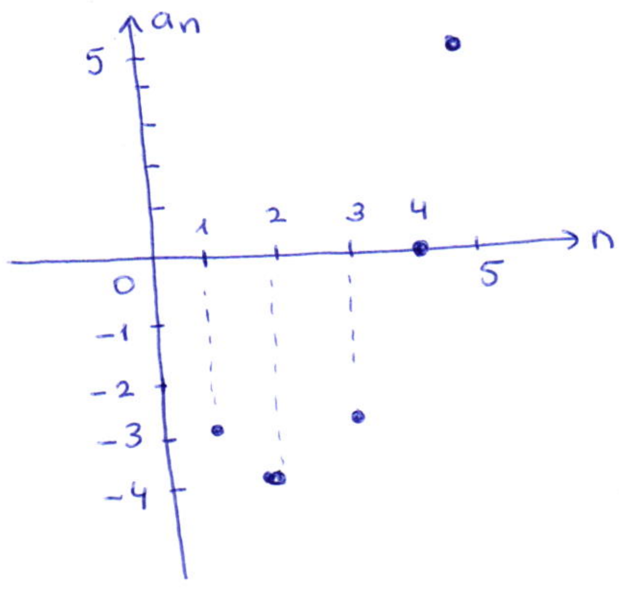
$a_4 = 4^2 - 4.4 = 0$

$a_5 = 5^2 - 4.5 = 5$

$\vdots$

Bu dizide $a_1 > a_2$ olduğu halde $a_2 < a_3$ tür.

Yani bu dizi monoton değildir.



Grafikten de anlaşılacağı üzere dizinin terimleri azalırken, sonra artmaya başlıyor. Yani bu dizi monoton artan veya azalan değildir.

ÖR/ $(a_n) = ((-1)^n . n)$ dizisinin monoton dizi olup olmadığını bulalım.

$$a_n = (-1)^n . n$$
$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} . (n+1)$$

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1}(n+1) - (-1)^n . n$$
$$= (-1)^n \left[(-1)(n+1) - n \right]$$
$$= (-1)^n \left[(-2n-1) \right]$$

n çift $\quad (-1)^n(-2n-1) = -2n-1 < 0$

n tek $\quad (-1)^n(-2n-1) = 2n+1 > 0$

$\forall n \in N^+$ için $a_{n+1} - a_n$ ifadesinin işaretine pozitif veya negatif diyemeyiz. (a_n) dizisi monoton değildir.

ÖR/ Genel terimi $a_n = \begin{cases} 1 & , n < 4 \text{ ise} \\ 1/n & , n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$

olan dizinin azalmayan veya artmayan dizi olup olmadığını bulalım.

(a_n) dizisinin terimleri,

$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = \frac{1}{4} \quad a_5 = \frac{1}{5} \quad a_6 = \frac{1}{6}$

$(a_n) = (1, 1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots)$

dizisi monoton artmayan bir dizidir.

ÖR/ $(a_n) = (n^2 - 3n + 2)$ dizisinin monoton azalmayan veya monoton artmayan olduğunu bulalım.

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 2 - (n^2 - 3n + 2)$$
$$= 2n - 2$$

$\forall n \in N^+$ için $2n - 2 \geq 0$ olduğdan $a_{n+1} - a_n \geq 0$ dır.

Dizi monoton azalmayan dizidir.

Sınırlı diziler

Tanım: Eğer her $n=1,2,3\ldots$ için $m \leq a_n$ oluyorsa, $\{a_n\}$ dizisi m ile alttan sınırlıdır.
Bu durumda m, $\{a_n\}$ dizisi için bir alt sınırdır. Alt sınırlar içinde en büyük olanınada en büyük alt sınır denir (EBAS)

Eğer her $n=1,2,3\ldots$ için $a_n \leq M$ oluyorsa, $\{a_n\}$ dizisi M ile üstten sınırlıdır. ve M, $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. Üst sınırlar içinde en küçük olana en küçük üst sınır denir (EKÜS)

Eğer $\{a_n\}$ hem alttan ve hem de üstten sınırlı ise $\{a_n\}$ ye sınırlı dizi denir.

Sınırlı dizi için şu şekilde tanım yapılabilir.

$\{a_n\}$ dizisinde $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ için $m \leq a_n \leq M$ olacak şekilde $m \in \mathbb{R}$ ve $M \in \mathbb{R}$ varsa $\{a_n\}$ dizisine sınırlı dizi denir.

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ dizisi sınırlıdır.

$n \geqslant 1$ için

$$\frac{n}{n} \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow 1 \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \quad a)$$

b) $0 < \frac{1}{n} \quad (n \geqslant 1)$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ m \text{ alt sınır}}}{0} < \frac{1}{n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ M \text{ üst sınır.}}}{1}$$

ÖR/ $\{a_n\} = \dfrac{n}{n+1}$ dizisi sınırlıdır.

Dizinin genel terimi $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ dir.

$n \geqslant 1$ olduğundan

$n + n \geqslant 1 + n$

$2n \geqslant 1 + n$

$\dfrac{n}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{n}{n+1}$ $(*)$

Yani dizi $1/2$ ile alttan sınırlıdır.

Ayrıca her n için

$n < n+1$

$(**)$ $\dfrac{n}{n+1} < 1$ olduğundan

dizi 1 ile üstten sınırlıdır.

Sonuç olarak

$\forall\ n = 1, 2, 3 \ldots$ için

$\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{n}{n+1} < 1$ dir.

Bir Dizmin Limiti

$\{a_n\}$ bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde ε bağlı bir $N > 0$ mevcut ise $\{a_n\}$ dizisinin L sayısına yakınsadığı söylenir ve

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \text{ dir denir.}$$

Bir dizinin limiti yoksa veya $\mp\infty$ ise dizi ıraksaktır.

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ dizi yakınsak

ÖR/ $\{a_n\} = \{n\} = \{1, 2, \ldots\}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} n = +\infty$ dizi ıraksak

ÖR/ $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1 \ldots\}$ limiti mevcut değildir. Dizi ıraksaktır.

Teorem; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, $a_n = f(n)$ ise

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ dir.

* $x < -1$ ise $\lim (x^n)$. limit yoktur.

1) Limit varsa tektir.

2) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \mp b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \mp \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} (k a_n) = k \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

5) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n . \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

6) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$

* $c < -1$ ise $\lim (c^n) =$ limit yoktur.

7) Diziler için sıkıştırma kuralı mevcuttur.

$\forall$ n için $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l = \lim_{n \to \infty} c_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = l \text{ dir.}$$

Bazı özel limitler

1) Eğer $x > 0$ ise $\lim\limits_{n \to \infty} x^{1/n} = 1$ dir.

$$\lim_{n \to \infty} x^{1/n} = \lim_{n \to \infty} e^{\ln x^{1/n}} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \ln x^{1/n}}$$
$$= e^0 = 1$$

2) $|x| < 1$ $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$ dır.

3) $\forall$ $k > 0$ için $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

4) $\forall$ x reel sayısı için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

5) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

6) $$\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$$

7) $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Teorem; Bir $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır.

Sınırlı diziler yakınsak olmayabilir.

Fakat sınırlı monoton diziler yakınsaktır.

Monoton artan ve üstten sınırlı her dizi yakınsaktır. Dizinin EBAS'ı ilk terimi, limiti EKÜS dir.

Monoton azalan ve alttan sınırlı her dizi yakınsaktır. Dizinin EBAS'ı limitine, ilk terimi EKÜS dir.

ÖR/ $(a_n) = \left(\frac{3n-1}{n+3}\right)$ dizisinin sınırlı ve monoton olduğunu gösteriniz.

$$a_n = \frac{3n-1}{n+3} = 3 - \frac{10}{n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

a) sınırlı olduğunu gösterelim.

$n \geqslant 1$

$n+3 \geqslant 4$

$\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4}$

$\frac{-10}{n+3} \geqslant \frac{-10}{4}$

$3 - \frac{10}{n+3} \geqslant 3 - \frac{10}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$3 - \frac{10}{n+3} \geqslant \frac{1}{2}$

$\frac{1}{n+3} > 0$

$\frac{-10}{n+3} < 0$

$3 - \frac{10}{n+3} < 3$

$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{EBAS}} \leq 3 - \frac{10}{n+3} < \underbrace{3}_{\text{EKÜS}}$

b) monoton olduğunu gösterelim.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-1}{n+4} - \frac{(3n-1)}{n+3} = \frac{10}{(n+4)(n+3)} > 0$$

olduğundan monoton artan

ÖR/ $a_n = \left(\frac{n+4}{4}\right)$ dizisi sınırlı mıdır?

$\forall n \in N^+$ için $a_n = \frac{n+4}{A} = 1 + \frac{4}{n}$ dir.

$n \geqslant 1$

$\frac{n}{1} \geqslant 1$

$\frac{1}{n} \leq 1$

$\frac{4}{n} \leq 4$

$1 + \frac{4}{n} \leq 5$

EKÜS $(a_n) = 5$ dir

$\frac{4}{n} > 0$

$0 < \frac{4}{n}$

$1 < 1 + \frac{4}{n}$

EBAS $(a_n) = 1$ dir.

Dolayısıyla $1 < 1 + \frac{4}{n} \leq 5$ dir ve (a_n) dizisi sınırlıdır?

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{e^n}{1-e^n} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1-e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n\left(\frac{1}{e^n}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^n}-1}$$

$$= -1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{\sqrt{n}+2}{n+1} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{2/\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+\underset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \left(\dfrac{1+n^2}{2+n^2}\right)^n \right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n^2}{2+n^2}\right)^n$$

$$\begin{array}{r|l} n^2+1 & 2+n^2 \\ \cline{2-2} -n^2 \mp 2 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n^2+2}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{n^2+2}}\right]^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2}\right]}_{e^{-1}}{}^{\frac{n}{n^2+2}} = \left(e^{-1}\right)^0 = 1 \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{n\,\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖR/ Genel terimi $a_n = n - \ln(e^n+1)$ olan dizinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[n - \ln(e^n+1)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln e^n - \ln(e^n+1)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)$$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}\right]$$

$$= \ln \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{e^n}}_{\to 0}} = \ln 1 = 0$$

ÖR/ $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(\infty-\infty)\,B}{\sqrt{n^2+2n}-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right]}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

ÖR/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = ?$ $\left(\infty/\infty\right)B$ (L'hopital kuralı)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖR/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n.\ln n}{n^2+1} = ?$ $\left(\infty/\infty\right)B$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \cancel{n}.\cancel{1/n}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + 1}{2n} = \left(\infty/\infty\right)B$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{2} = 0$$

ÖR/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n} - 1}{\sin\left(1/n\right)} = ?$

Hatırlatma:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \ln e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - 1}{x^2} = \ln 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \ln e = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(1/x\right)}{1/x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{e^{1/n} - 1}{1/n}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1/n}{\sin 1/n}}_{1}$$

$$= 1$$

ÖR/ $\left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

Sıkıştırma teo den

$\forall$ n için $|\cos n| \leq 1$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \text{ dir.}$$

$$\underset{a_n}{\frac{-1}{n}} \leq \underset{b_n}{\frac{\cos n}{n}} \leq \underset{c_n}{\frac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{dan } \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \text{ dır.}$$

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}$ dizisinin limitinin 0 olduğunu gösteriniz.

1 yol: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \overset{\infty/\infty \text{ bel}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n}{2n} = 0$

2 yol: $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$ (Sıkıştırma teo)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} b_n = L \text{ dir.}$$

$\forall$ $n = 1, 2, 3 \ldots$ için

$n \geq 1$ için $\ln n \geq 0$

$$\frac{\ln n}{n^2} \geq 0 \quad (1)$$

$n \geq 1$ için

$$\ln n \leq n$$

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 0 \leq \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$$

ÖR/ $\{a_n\} = \{\sqrt{e^{2n}-1} - e^n\}$

dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{e^{2n}-1} - e^n)(\sqrt{e^{2n}-1} + e^n)}{\sqrt{e^{2n}-1} + e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^{2n}} - 1 - \cancel{e^{2n}}}{\sqrt{e^{2n}-1} + e^n} = \frac{-1}{\infty} = 0 \text{ yakınsak}$$

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{\frac{n + \arctan n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$x \geq 1$ için $f(x) = \frac{x + \arctan x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{\arctan x}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}_{1} + \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}_{1}$$

$= 1$ yakınsak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)B}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

ÖR/ Ardışık olarak $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $n \geq 1$ doğal sayısı için $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ olduğuna göre

$\left\{\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+a_n}-1-1}{a_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+a_n}-2}{a_n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{3+a_n}-2)(\sqrt{3+a_n}+2)}{(a_n-1)(\sqrt{3+a_n}+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{3+a_n-4}^{a_n-1}}{\cancel{(a_n-1)}\sqrt{3+a_n}+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3+a_n}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}$$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \text{ olduğu için}\right)$

ÖR/ Eğer $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ve $2a_n + 3a_{2n+1} = \frac{5n+1}{2n+3}$ ise $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Not: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ dır.

$$\lim_{n\to\infty} (2a_n + 3a_{2n+1}) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{2n+3}}_{5/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2a_n + \lim_{n\to\infty} 3a_{2n+1} = 5/2$$

$$2 \cdot a + 3 \cdot a = 5/2 \Rightarrow 5a = 5/2 \quad a = 1/2$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2 \text{ dir.}$$

Seriler

Belli bir kuralla birbirine bağlı sayılar dizisinin tüm elemanlarının toplamından oluşan ifadeye seri denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ÖR/ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots$$

Kısmi Toplamlar Dizisi

$\{a_1, a_2 \cdots a_n \cdots\}$ sonsuz bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerini kullanarak

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ kısmi toplamlarını yazalım.

Böylece yeni bir $\{S_1, S_2 \cdots S_n\}$ dizisi elde ederiz.

Tanım: $\{a_n\}$ dizisinden elde edilen $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisine bir seri ve

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ toplamına serinin n-inci kısmi toplamı denir.

ÖR /

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+ \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+ \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

ıraksaktır

Tanım; $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ise yani kısmi toplamlar dizisi sonlu bir limit değerine sahip ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine yakınsak denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$ yazılır.

Eğer kısmi toplamlar dizisi ıraksak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine ıraksak denir. Bir serinin yakınsak veya ıraksak olmasına serinin karakteri denir.

Yakınsak iki serinin toplamı ve farkı yakınsaktır.
Yakınsak " " bir sayı ile çarpımı yakınsaktır.

IRAKSAKLIK TESTİ (N.th terim testi)

Eğer $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ (veya $\mp\infty$) ise

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$ serisi ıraksaktır.

$a_n = \frac{n+1}{2n+3}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$
olup seri ıraksaktır

* Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ dır.

Bunun tersi doğru değildir.

$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ise, $\sum a_k$ serisi yakınsakda, ıraksak ta olabilir.

ÖR/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ serisi için $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k\ln k} = 0$ dır.

serinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı için birşey söylenemez.

Teleskopik Seri

Bazı seriler terimler birbirlerini sonsuza kadar yokederek devam ediyorsa böyle serilere teleskopik seri denir.

ÖR/ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = ?$

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$A = 1 \quad B = -1$ bulunur.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = 1$ dir.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = ?$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k$$

$$= \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \dots + \cancel{\ln n} - \ln(\cancel{n-1}) + \ln(n+1) - \cancel{\ln n}$$

$$S_n = -\underbrace{\ln 1}_{0} + \ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

Geometrik Seri

a ve r birer reel sayı olmak üzere

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$ serisine başlangıç terimi a ve oranı r olan geometrik seri denir.

$$a \neq 0 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} \text{ serinin toplamı}, & |r|<1 \text{ ise yakınsak} \\ \text{ıraksak}, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

ÖR

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad r = 1/2 < 1$

seri yakınsak

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{e})^{1-4n}$ toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{e})(\sqrt{e})^{-4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{e}\,(e^{-2})^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{e}\,(e^{-2})(e^{-2})^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{e}}{e^2} \cdot (e^{-2})^{n-1}$$

$a = \dfrac{\sqrt{e}}{e^2}$ $\quad r = \dfrac{1}{e^2} < 1$ yakınsak

$$= \frac{\sqrt{e}/e^2}{1-\left(\frac{1}{e^2}\right)} = \frac{\sqrt{e}}{e^2-1}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{(-1/2)}{1-(-1/2)} = \frac{5}{3}$$

ÖR/ Eğer $n \geqslant 0$ bir tamsayı ise $\sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k}$ toplamını bulunuz

$m = k-n$ olsun.

$$\sum_{m=0}^{\infty} 3^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2/3} = 3/2$$

ÖR/ $1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^3} + \dots + (-1)^n \pi^{-n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n$ geo seri

$|r|<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi}\right)\left(\frac{-1}{\pi}\right)^{n-1}$ $\quad r = -\frac{1}{\pi} < 1$ yakınsak

$$= \frac{-1/\pi}{1-(-1/\pi)} = \frac{-1/\pi}{\pi+1/\pi} = \frac{-1}{\pi+1}$$

ÖR/ $1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1}$

$a=1 \quad r=\sqrt{2} > 1$ ıraksak

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \quad \text{geo seri}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \qquad a=1 \quad r=\frac{1}{e}<1$$

yakınsak

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-1/e} = \frac{e}{e-1}$$

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^{k/2} \cos k\pi$ toplamını bulunuz.

$$\cos k\pi = (-1)^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi^{k/2} \cos k\pi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k . \pi^{k/2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1.\sqrt{\pi})^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-\sqrt{\pi})^{k-1} . (-\sqrt{\pi})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-\sqrt{\pi})(-\sqrt{\pi})^{k-1} \longrightarrow \text{seri ıraksak}$$

(ıraksak $\begin{cases} r<-1 \\ r \geq 1 \end{cases} \longleftrightarrow r=-\sqrt{\pi}<-1$

$-1<r<1$ iken yakınsak)

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ Geo seri

$a=1 \quad r=\frac{e}{\pi}<1$ seri yakınsak

$$S = \frac{1}{1-\frac{e}{\pi}}$$

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}} = ?$

$\sum_{n=0}^{\infty} 5.\left(\frac{1}{10^3}\right)^n$ Geo Seri

$a=5 \quad r=\frac{1}{10^3}<1$ yakınsak

$$S = \frac{5}{1-\frac{1}{10^3}}$$

ÖR/ $0,\overline{32} = 0,323232\ldots$ geometrik seri yardımıyla cevabı bulunuz.

$x = 0,\overline{32} = 0,32 + 0,0032 + 0,000032 + \ldots$

$$x = \frac{32}{100} + \frac{32}{10000} + \frac{32}{1000000} + \ldots$$

$$x = \frac{32}{10^2} + \frac{32}{10^4} + \frac{32}{10^6} + \ldots$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 32 \left(\frac{1}{100}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{32}{100}}_{a} \underbrace{\left(\frac{1}{100}\right)}_{r}^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{32/100}{1-1/100}$$

$$= 32/99$$

$a = \frac{32}{100}$ $r = \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow$ yakınsak

Harmonik Seri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$ harmonik seri ıraksaktır.

p - serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots \quad \begin{cases} p \leq 1 & \text{ıraksak} \\ p > 1 & \text{yakınsak} \end{cases}$$

Pozitif terimli seriler için yakınsaklık testleri

İNTEGRAL TESTİ:

Teo: f, $[1,\infty)$ aralığında sürekli, azalan ve pozitif değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\ n \geq 1$ tamsayısı için $a_n = f(n)$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ serisi ve $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ improper integrali her ikisi birden ya yakınsar ya da ıraksar.

Yani serinin yakınsak olması için f yk improper integralinin yakınsak olmasıdır.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisi yakınsaktır.

$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ fonk $[1,\infty)$ sürekli, pozitif değerli ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} \qquad u=\ln x \quad du = dx/x$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(\ln x)\Big|_1^b\right.$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\arctan(\ln b) - \arctan(\underbrace{\ln 1}_{0})) = \pi/2$$

Seri Yakınsak

ÖR/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ fonksiyonu $[2,\infty)$ aralığında sürekli ve pozitif değerlidir. $x \geq 2$ için

$$f'(x) = -\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)^{3/2}} < 0 \quad \text{azalandır.}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cancel{\sec t}\,\tan t\,dt}{\cancel{\sec t}\sqrt{\sec^2 t-1}} \qquad \begin{aligned} x &= \sec t \\ dx &= \sec t \cdot \tan t\,dt \end{aligned}$$

$$= \int dt = t + c$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{Arc}\sec x \Big|_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty} \Big[\operatorname{Arc}\sec \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{b} - \operatorname{arc}\sec 2\Big] = \pi/2 - \pi/3$$
$$= \pi/6$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}$ serisi yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$

p serisini integral testi ile inceleyelim.

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

$[1,\infty)$ aralığında $f(x) = \frac{1}{x^p}$ fonksiyonu sürekli, azalan ve pozitif değerlidir.

$p > 1$ için serinin yakınsak olduğunu gösterelim.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)$$

$p-1>0$

$$= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}$$

Seri yakınsaktır.

$p<1$ ise seri ıraksaktır. Gösterelim.

$p<1 \Rightarrow 1-p>0$ dır.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)$$

$$p-1 = -\underbrace{(1-p)}_{>0}$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-p}-1\right) = \infty$$

olup seri ıraksaktır.

$p=1$ ise

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \ln b - \underbrace{\ln 1}_{0}$$

$$= \ln\infty = \infty$$

ıraksak

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots$$ p serisi

$p \le 1$ ıraksak

$p > 1$ yakınsak

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2/2}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n = f(n)$ dersek $f(x) = xe^{-x^2/2}$ $[1,\infty)$ aralığında pozitif ve süreklidir.

$$f'(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2} = 0 \qquad x = \mp 1$$

$x > 1$ ise $1-x^2 < 0$ olduğundan $f'(x) < 0$ dır. ve fonksiyon azalandır.

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x^2/2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x^2/2}\Big|_1^b\right)$$

$$\lim_{b\to\infty}\Big[\underbrace{-e^{-b^2/2}}_{0} + e^{-1/2}\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}$$ Seri yakınsak

Mukayese (Karşılaştırma) testi:

$\sum a_k$ ve $\sum b_k$ terimleri negatif olmayan iki seri olsun.

Bu taktirde

a) Eğer $\forall$ k için $a_k \le b_k$ ve $\sum b_k$ serisi yakınsak ise $\sum a_k$ serisi de yakınsaktır.

b) Eğer $\forall$ k için $a_k \geqslant b_k$ ve $\sum b_k$ serisi ıraksak ise $\sum a_k$ serisde ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Mukayese (Karşılaştırma testi)

$\forall n \geq 0$ için $\quad 2^n \leq 2^n + n \qquad a_n \leq b_n$

$$\frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^n+n} \Rightarrow \frac{1}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi yakınsak olduğundan (geo seri $r=\frac{1}{2}<1$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ serisi de yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$k \geq 2$ için $\quad k < e^k \Rightarrow \ln k < k$

$$\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}$$

$$a_k > b_k$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmonik seri) ıraksak olduğundan

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ de ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$n \geq 1$ için $\quad n < n+1$

$$n^3 < (n+1)^3$$

$$\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ serisi p serisi ($p=3$) yakınsak dolayısıyla

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ de yakınsaktır.

Cauchy Kök testi

$\sum a_k$ terimleri negatif olmayan bir seri ve

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = p \text{ olsun.}$$

1) Eğer $p<1$ ise $\sum a_k$ serisi yakınsaktır.
2) Eğer $p>1$ ise $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.
3) Eğer $p=1$ ise bu test sonuç vermez.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+5)^{1/n}}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left[2^n\left(1+\frac{5}{2^n}\right)\right]^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1+\frac{5}{2^n}\right)^{1/n}$$

$$= \frac{2}{3} < 1 \text{ yakınsak}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+n}\right)^n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n^2+n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n} = 0 < 1 \text{ yokınsak}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0$$

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(e^k-k)^k}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{(e^k-k)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{2/k}}{e^k-k} = ?$$

$$= \frac{\lim_{k\to\infty} k^{2/k}}{\lim_{k\to\infty} e^k-k} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

Seri yakinsaktır.

* $\lim_{k\to\infty} k^{2/k} = ?$ $(\infty^0)B$

$$y = k^{2/k}$$

$$\ln y = \ln k^{2/k} = 2/k \ln k$$

$$\lim_{k\to\infty} \ln y = \lim_{k\to\infty} \frac{2\ln k}{k} \left(\infty/\infty\right)^B$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2/k}{1} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} y = \lim_{k\to\infty} k^{2/k} = e^0 = 1$$

* $$\lim_{k\to\infty} e^k - k = \lim_{k\to\infty} e^k\left(1 - k/e^k\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to\infty} e^k}_{\infty} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{k}{e^k}\right)^{(\infty/\infty)^B}$$

$$\infty \cdot \left[\underbrace{\lim_{k\to\infty} 1}_{1} - \lim_{k\to\infty} \frac{k}{e^k}\right] = \infty \cdot 1 = \infty$$

$$1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^k}$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

Limit Mukayese testi (Bölüm testi)

$\sum a_k$ ve $\sum b_k$ terimleri negatif olmayan iki seri

$\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L$ olsun.

1) $L \neq 0, \infty$ dan farklı bir sayı ise a_k ile b_k aynı karakterdedir.

2) $L = 0$ ve b_k serisi yakınsak ise a_k serisi de yakınsaktır.

3) $L = \infty$ ve b_k serisi ıraksak ise a_k serisi de ıraksaktır.

ÖR/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alalım.

p serisi ıraksak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$$

$$= 1 \neq 0, \infty$$

$b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak Dolayısıyla

$a_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ de ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ alalım. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1 \neq 0, \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisi de yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \frac{1}{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$b_n = \frac{1}{n^3}$ serisini seçelim. p serisi $p = 3 > 1$ yakınsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sin 1/n\right)^3}{\frac{1}{n^3}}$$

Not:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 1/x}{1/x} = 1$$

$1/x = t$

$x \to \infty \quad t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin 1/n}{1/n}\right)^3$$

$$= 1 \neq 0, \infty$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum \sin^3 \frac{1}{n}$ de yakınsaktır.

D'Alembert Oran testi

Bütün terimleri pozitif olan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisini gözönüne alalım.

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$ olsun. $L<1$ ise seri yakınsak

$L>1$ " " ıraksak

$L=1$ ise birşey söylenemez.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

yakınsak

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(10)^{n-1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{10^n}}{\frac{(n-1)!}{10^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n} \cdot \frac{10^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n-1)!}\, n \cdot 10^{-1}}{\cancel{(n-1)!}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{10} = \infty > 1$$

ıraksak

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}\, \cancel{(n+1)} \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e > 1$$

ıraksak

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n-1}$$

$a = \frac{1}{e^2}$ $\quad r = \frac{1}{e^2} < 1$ yakınsak

$$S = \frac{1/e^2}{1 - 1/e^2}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}} \qquad n^{4/3} \cdot n^{-5/3} = n^{-1/3} = \frac{1}{n^{1/3}}$$

$b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$ seçelim.

Limit mukayese testi (Bölüm Testinden)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}} \cdot n^{1/3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}+n^{5/3}}{2+n^{5/3}} = 1 \neq 0, \infty$$

olduğu için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ serisi ıraksak $\quad$ p serisi $p = 1/3 < 1$ ıraksak

Dolayısıyla

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ de ıraksak

ÖR / $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{(1+x)^2}\right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{1+x}\Big|_{k}^{k+1}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{1+k+1}+\frac{1}{1+k}\right]$$

Teleskopik Seri $=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

$$S_n=\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\tfrac{1}{3}\right)+\dots+\left(\tfrac{1}{n}-\cancel{\tfrac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{n+1}}-\tfrac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+2}\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=1$$

ÖR / $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$n<e^n\Rightarrow \ln n<n\qquad (n\geq 1)$$

$$\frac{\ln n}{(n+1)2^n}<\frac{n}{(n+1)2^n}<\frac{n}{n\,2^n}=\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{\ln n}{(n+1)2^n}<\frac{1}{2^n}\qquad a_n<b_n$$

$b_n=\sum\frac{1}{2^n}$ yakınsak (Geo Seri)

Mukayese testinden $\sum\frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ de yakınsaktır.

Veya Bölüm testinden de yapılır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{(n+1)\cancel{2^n}}\cdot\cancel{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0=L$$

$\sum\frac{1}{2^n}$ yakınsak $\sum\frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ de yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3ke^k}{2k^2+5k}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Iraksaklık Testi ile;

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3ke^k}{2k^2+5k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}.3e^k}{\cancel{k}(2k+5)} \overset{(\infty/\infty)\,B}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{3e^k}{2k+5} = \lim_{k\to\infty} \frac{3e^k}{2}$$

$=\infty$

Iraksak

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Mukayese testinden;

$$3^n \leq 3^n+n \Rightarrow \frac{1}{3^n} \geq \frac{1}{3^n+n} \Rightarrow \frac{1}{3^n+n} \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

geo seri

$r=\frac{1}{3}<1$ yakınsak

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$ de yakınsak

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Mukayese testinden;

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak (harmonik seri)

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ de ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ serisi ıraksaktır.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ tek} \\ 1, & n \text{ çift} \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ mevcut değil. Seri ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(1+\ln k)^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz

$f(x) = \frac{2}{x(1+\ln x)^3}$ integral testi

$$\int_1^{\infty} \frac{2\,dx}{x(1+\ln x)^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{2\,dx}{x(1+\ln x)^3}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left. \frac{-1}{(1+\ln x)^2} \right|_1^b$$

$1+\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$$\int \frac{2\,du}{u^3} = 2\int u^{-3}\,du$$

$$= \frac{2u^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{-1}{u^2} = -\frac{1}{(1+\ln x)^2}$$

$$\lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{(1+\ln b)^2} + \frac{1}{(1+\underbrace{\ln 1}_{0})^2} \right]$$

$$= \frac{-1}{(1+\ln\infty)^2} + 1 = 1$$

seri yakınsak

ÖR/ $x = 0,323232\cdots = 0,\overline{32} = \frac{32}{99}$ olduğunu geometrik seri ile gösteriniz.

$$x = 0,32 + 0,0032 + 0,000032 + \cdots$$

$$= \frac{32}{10^2} + \frac{32}{10^4} + \frac{32}{10^6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \frac{1}{100} \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

$a = 32/100 \qquad r = \frac{1}{100} < 1$

$$S = \frac{32/100}{1 - 1/100} = \frac{32}{99}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ serisinin karakterini belirle.

Cauchy – Kök testi.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} \right]^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \quad (1^\infty) B$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \left(\frac{1}{\frac{n+2}{n}}\right)^n$$

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)^n$$

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

$$= e^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)^n = \frac{e^3}{e^2} = e > 1$$

Kök testine göre ıraksak.

ÖR/ $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ serisinin karakteri ?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} \quad (1^\infty) B$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1}$$

$$\begin{array}{r|l} n-1 & n+1 \\ \underline{-n \mp 1} & 1 \\ -2 & \end{array}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+1}}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n-1}{n+1}}$$

$$= \left(e^{-2}\right)^1 = \frac{1}{e^2} < 1 \quad \text{seri yakınsak}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . n!}{n^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n . n!}$$

D'alembert oran testi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}.2}{\cancel{2^n}} \cdot \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n . \cancel{(n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 . \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

1^{∞} belirsizliği

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \end{array}}$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

olup $\sum a_n$ serisi yakınsak

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8 \cdots (3n-1)}{1.3.5 \cdots (2n-1)}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2}.\cancel{5}.\cancel{8} \cdots \cancel{(3n-1)}(3n+2)}{\cancel{1}.\cancel{3}.\cancel{5} \cdots \cancel{(2n-1)}(2n+1)} \cdot \frac{\cancel{1}.\cancel{3}.\cancel{5} \cdots \cancel{(2n-1)}}{\cancel{2}.\cancel{5}.\cancel{8} \cdots \cancel{(3n-1)}}$$

$$= \frac{3}{2} > 1$$ seri ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{\frac{n^3+1}{2n^2+3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz?

Cauchy-Kök testi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(4^{\frac{n^3+1}{2n^2+3}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{n^3+1}{2n^3+3n}} = \lim_{n\to\infty} 4^{1/2}$$

$$= 2 > 1$$

olup seri ıraksak

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{1+5n^2}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{1+5n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$ seri ıraksak (ıraksaklık testi)

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n})}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1-n}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-1/n)}{\sqrt{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-1/n)}{\sqrt{n}\left[\sqrt{2-\frac{1}{n}}+1\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\underset{\to\infty}{\sqrt{n}}\;(1-\overset{\to 0}{1/n})}{\sqrt{2-\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}}+1}$$

$$= \frac{\infty}{\sqrt{2}+1} = \infty$$

seri ıraksak

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5}{4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ $\quad a=5$

$r=-1/4<1$

$S=\frac{5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{5}{5/4}=4$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$a=1$ $\qquad$ $a=1$

$r=1/2<1$ $\qquad$ $r=1/6<1$

Yakınsak $\qquad$ yakınsak

$S=\frac{1}{1-1/2}-\frac{1}{1-1/6}=\frac{1}{1/2}-\frac{1}{5/6}$

$=2-6/5=4/5$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ toplamını bulunuz.

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \qquad A = 1/2 \quad B = -1 \quad C = 1/2$$

$(k+2)(k+1) \quad k(k+2) \quad k(k+1)$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)\right] + \dots + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n+2}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Alterne Seri

Terimleri, sırasıyla bir pozitif ve bir negatif (veya bir negatif ve bir pozitif) olan seriye bir alterne seri denir.

Genel bir alterne seri, her $k=1,2,3..$ için $a_k>0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1-a_2+a_3-\dots\mp(-1)^{k+1}a_k\pm\dots$$

şeklindedir. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ şeklinde de olabilir.

ÖR/ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\dots$

ÖR/ $-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{(-1)^n 4}{2^n}+\dots$

Teorem; Alterne Seri Testi

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ bir alterne seri olsun.

Eğer aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa seri yakınsaktır.

1) $\forall k$ için a_k pozitif olmalı.

2) $\forall k$ için $a_k \geq a_{k+1}$
(yani serinin her terimi mutlak değerce azalıyor)

3) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1}$ serisini gözönüne alalım.

1) $k = 1, 2 \ldots$ için $a_k = \frac{1}{k^2+1}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1/5$ a_k nın tüm terimleri pozitif

2) Her k için

$\frac{1}{(k+1)^2+1} < \frac{1}{k^2+1}$ yani $a_{k+1} < a_k$ dır.

3) $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^2+1} = 0$ dır.

Seri yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklık

Değişken işaretli $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ serisinde, eğer $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise serinin mutlak yakınsak olduğu söylenir.

Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır.

Şarta bağlı yakınsaklık

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi ıraksak fakat alterne seri testi ile yakınsak çıkarsa bu seriye şarta bağlı yakınsak seri denir. Alterne seri testi sağlanmazsa seri ıraksak olur.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$ $p = 2 > 1$ seri yakınsak

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$ serisi mutlak yakınsak seridir.

ÖR/ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$ geo seri $r = \frac{2}{3} < 1$ seri yakınsak

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$ serisi mutlak yakınsak seridir.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ serisini gözönüne alalım.

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonik seri ıraksak

Alterne testi uygulayalım.

1) Her için $a_k = \frac{1}{k}$ pozitif terimli

2) $a_k > a_{k+1}$ dir. $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$

3) $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$ dır.

Alterne seri testi sağlandığından $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ serisi şarta bağlı yakınsak seridir.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+\cos n}{n^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1+\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ bu serinin karakterini belirle.

$\forall$ n için $-1 \leq \cos n \leq 1$

$0 \leq \cos n + 1 \leq 2$

$\frac{0}{n^2} \leq \frac{\cos n + 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$ Mukayese (Karşılaştırma) testi

$\frac{1+\cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$

$a_n \leq b_n$

$b_n = \sum \frac{2}{n^2}$ serisi $p=2>1$ yakınsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ de yakınsak

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+\cos n}{n^2}$ serisi mutlak yakınsak seridir.

Değişken Terimli Seriler (Kuvvet Serileri)

Tanım: $x=0$ civarındaki bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

biçimindeki bir seri olarak tanımlanır.

$x = x_0$ civarındaki bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots$$

şeklindeki seriye kuvvet serisi denir.

Burada x_0 serinin merkezi $a_0, a_1 \dots a_n$ serinin katsayılarıdır. Böyle bir seri, x değişkeninin alacağı değerlere göre yakınsak veya ıraksak olabilir.

1) Seri sadece $x = x_0$ da yakınsak olabilir.

2) Seri, her x reel sayısı için yakınsak olabilir.

3) Seri, bir aralık (açık, kapalı veya yarı-açık) içinde yakınsak olabilir.

Seriyi yakınsak yapan x değerlerinin oluşturduğu aralığa yakınsaklık aralığı denir. Yakınsaklık aralığı oran testinin uygulanması ile bulunur.

Eğer $u_n = a_n (x-x_0)^n$ dersek

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0| \quad \text{olup}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{almakla}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = R|x-x_0| \quad \text{bulnur.}$$

O halde serinin yakınsak olabilmesi için

$R|x-x_0| < 1$ olmalıdır. $|x-x_0| < \frac{1}{R}$

$x_0 - \frac{1}{R} < x < x_0 + \frac{1}{R}$ elde ederiz.

$\left(x_0 - \frac{1}{R},\ x_0 + \frac{1}{R}\right)$ serinin yakınsaklık aralığı denir. $\frac{1}{R}$ sayısına da yakınsaklık yarıçapı denir.

ÖR/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}}_{0} \cdot |x| < 1$$

$|x| < \infty$

Bu seri bütün x değerleri için yakınsaktır.

ÖR/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \dots$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = \underbrace{\lim_{n\to\infty} n+1}_{\infty} \cdot |x|$$

$x=0$ haricindeki bütün değerlerde ıraksak

$x=0$ da yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ serinin yakınsaklık aralığını bul uç noktalarda seriyi incele

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x-2)^n}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x-2)^n} \right|$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}}_{1} \cdot |x-2| = |x-2| < 1 \text{ olmalı}$$

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1$$

$1 < x < 3$ Yakınsaklık aralığı

$x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ alterne seri

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ mutlak yakınsak

$x=3$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak

$-1 \leq x \leq 3$ yakınsaklık aralığı

ÖR $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n^2}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. 47

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n^2}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^n \cdot (x+1)}{2^n \cdot 2 \, (n+1)^2} \cdot \frac{2^n \cdot n^2}{(x+1)^n} \right|$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^2}_{1} \cdot \left|\frac{x+1}{2}\right| \Rightarrow \left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$$

$$|x+1| < 2$$

$$-2 < x+1 < 2$$

$$-3 < x < 1 \quad \text{Y.A}$$

Bu aralıktaki her reel sayı için seri yakınsaktır.

Uçları inceleyelim.

$R = \frac{1-(-3)}{2}$ yakınsaklık yarıçapı

$x=-3$ için x yerine -3 koyalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\overbrace{(-2)^n}^{(-1)^n \cdot 2^n}}{2^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^{2n}}^{1} \cdot 2^n}{2^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$p=2>1$ seri yakınsak

$x=1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^n}{2^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{yakınsak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{mutlak yakınsak}$$

$$-3 \le x \le 1$$

ÖR / $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^n+1}$ serisinin hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şarta bağlı yakınsak ve ıraksak olduğunu inceleyiniz. '48

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{e^{n+1}+1} \cdot \frac{e^n+1}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+1}{e^{n+1}+1} \cdot |x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}{\cancel{e^n}\left(e+\frac{1}{e^n}\right)} |x|$$

$$= \frac{|x|}{e} < 1 \Rightarrow |x| < e$$

$-e < x < e$ yakınsaklık aralığı

Uç noktalarda seriyi inceleyelim.

$x = e$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+1}$ serisinin karakterini belirle

Iraksaklık Testi, $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}\left(1+\frac{1}{e^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^n}}$

$= 1 \neq 0$

ıraksak

$x = -e$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e)^n}{e^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{e^n+1}$

serinin mutlak değerlerinden oluşan kısmı

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+1}$ ıraksak

Alterne seri testinden 3 koşul sağlanmadığından yani $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ dır.

seri ıraksak

Yakınsaklık aralığı $-e < x < e$ dir.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{4^k (k+1)^2}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Uç noktalarda seriyi inceleyiniz. 49

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{4^{k+1}(k+2)^2}}{\frac{x^k}{4^k(k+1)^2}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^k . x}{4^k . 4 (k+2)^2} \cdot \frac{4^k (k+1)^2}{x^k} \right|$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}}_{\frac{1}{4}} . |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} |x| < 1$$

$$|x| < 4$$

$$\underline{-4 < x < 4}$$

Yakınsaklık aralığı

Uç noktalarda seriyi inceleyelim.

$\underline{x=-4}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{4^k (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cancel{4^k}}{\cancel{4^k} (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ serisinin karakterini belirle

D'alembert oran testi ile

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+2)^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = 1$$

test cevap vermiyor.

Şimdi Mukayese testi ile yapalım

$$k \geq 1 \Rightarrow k < k+1 \Rightarrow k^2 < (k+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k^2} \text{ dir.}$$

Mukayese testinden; [$\sum \frac{1}{k^2}$ serisi $p=2>1$ olduğundan yakınsaktır.]

Dolayısıyla ondan daha küçük olan $\sum \frac{1}{(k+1)^2}$ de yakınsaktır. $\sum \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ mutlak yakınsak seridir.

$x=4$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{4^k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$ nın yakınsak olduğunu mukayese testi ile gösterdik

$-4 \leq x \leq 4$ yakınsaklık aralığıdır

ÖR/ $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-k+3}{2k^2-6}$$ serisinin karakterini belirleyiniz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2-k+3}{2k^2-6} = \frac{1}{2} \neq 0$$ seri ıraksak

Iraksaklık testi (n. terim testi)

Eğer $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ (veya ∞) ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

ÖR/ $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\sqrt{k}}$$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$$

$p = \frac{1}{2} < 1$ ıraksak

Alterne seri testi

1) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$

2) $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. $a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Rightarrow a_k > a_{k+1}$

olması nedeniyle seri şarta bağlı yakınsak seridir.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!+1}$ mutlak yakınsak mı, şarta bağlı yakınsak mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!+1}$$ karakterini belirle

D'alembert oran testi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2}^{\cancel{n}+1}}{(n+1)!+1} \cdot \frac{n!+1}{\cancel{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n!+1}{(n+1)!+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!+1}}{\frac{2^n}{n!+1}}$$

pay ve payda n! böl

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{\frac{n!}{n!} + \frac{1}{n!}}{\frac{(n+1)!}{n!} + \frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{1 + 1/n!_{\to\infty}}{n+1+\frac{1}{n!_{\to\infty}}}$$

$n!(n+1)$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

yakınsak dolayısıyla

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!+1}$ serisi mutlak yakınsak

ÖR/ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,(x-2)^k}{3^k}$ hangi x değerleri için yakınsaktır?

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!\,(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k!\,(x-2)^k} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{3} \cdot |x-2|$$

$$= \infty > 1$$

$x \neq 2$ için seri ıraksak

$x = 2$ de sadece seri yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^{n+1}}+\frac{\cos n\pi}{3^{n+2}}\right)=?$

Geo Seriyi hatırla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n}=a+ar+ar^2+\dots$$

$|r|<1 \Rightarrow$ yakınsak

Toplam $=\frac{a}{1-r}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{2^n.2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n.9}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{5}{2}}_{a}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{r}^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{9}}_{a}\underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)}_{r}^{n}$$

$$=\frac{5/2}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)}=5+\frac{1}{12}=\frac{61}{12}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=?$

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\underbrace{\frac{n+1}{(n+1)!}}_{n!(n+1)}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

Önce düzenledin.
Teleskopik seri

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=?$$

$$S_n=\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{1}{2!}}\right)}_{n=1\text{ için}}+\underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)}_{n=2}+\dots+\underbrace{\cancel{\frac{1}{(n-1)!}}-\cancel{\frac{1}{n!}}}_{n=n-1}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n!}}-\frac{1}{(n+1)!}}_{n=n}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{(n+1)!}=1 \text{ Toplam}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ seri yakınsak ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \iff \begin{cases} |r|<1 & \text{yakınsak} \\ |r|\geq 1 & \text{ıraksak} \end{cases}$$

Eğer bir f fonksiyonunu $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ şeklinde tanımlarsak yukarıdaki seride $r=x$ olacak.

$|x|<1$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$ yazarız.

Dolayısıyla bir f fonksiyonunu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ kuvvet serisi ile temsil edebiliriz.

ÖR/ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ bu fonksiyonu temsil eden kuvvet serisini belirleyiniz.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$|-x^2|<1 \Rightarrow \underbrace{x^2<1}_{\text{karekök aldım.}} \Rightarrow |x|<1$$

ÖR/ $f(x)=\frac{1}{3+2x}$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini belirleyiniz.

$|x|<1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ idi

$$f(x)=\frac{1}{3+2x}=\frac{1}{3\left(1+\frac{2}{3}x\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)}$$

$\left|-\frac{2}{3}x\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{2}{3}x\right|<1$ $\quad |2x|<3$

$-3<2x<3$

$-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$ veya $|x|<\frac{3}{2}$

$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2x)^n}{3^{n+1}}$$

Kuvvet Serilerinin türevi ve integrali

Teorem; Eğer x_0 bir sabit olmak üzere

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+\cdots$ serisi

$\left(x_0-\frac{1}{R},\ x_0+\frac{1}{R}\right)$ de yakınsak ise,

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[a_n(x-x_0)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$ serisi de

$\left(x_0-\frac{1}{R},\ x_0+\frac{1}{R}\right)$ de yakınsaktır.

ÖR/ $f(x)=\frac{1}{(2+x)^2}$ fonk temsil eden kuvvet serisini bul.

$\frac{-1}{x^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$, $-\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)$, $\frac{-1}{(2+x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right)$ ise

$\frac{1}{(2+x)^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right)$ seriye açalım.

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{1-(-x-1)} \qquad |-x-1|<1$$

$$|x+1|<1$$

$$-1<x+1<1$$

$$-2<x<0$$

$$\frac{1}{1-(-x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$$

$$\frac{1}{(2+x)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[(-1)^n (x+1)^n\right]$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . n(x+1)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} . n(x+1)^{n-1}$$

Teorem; Eğer f, $\forall x \in \left(x_0-\frac{1}{R}, x_0+\frac{1}{R}\right)$ için yakınsak bir seri temsiline sahip ise, yani

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ise her iki tarafı integre edersek

$$F(x) = \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$ serisi de

$\left(x_0-\frac{1}{R}, x_0+\frac{1}{R}\right)$ de yakınsaktır.

ÖR/ $\ln(1+x^2)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini bulunuz.

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2) + c$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 2x.\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad |x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x.\,(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.\,2.\,x^{2n+1}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.\,2.\,x^{2n+1}$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.\,\frac{2.\,x^{2n+2}}{2n+2} + c \qquad |x|<1$$

c yi yok edelim: $2(n+1)$

$x=0$

$\ln(1+0) = 0+c \qquad c=0$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.\,x^{2n+2}}{n+1} \qquad |x|<1$$

ÖR/ $f(x)=\arctan x$ fonk kuvvet serisi açılımını bulunuz

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x|<1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan x \Big|_0^x = \arctan x$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|<1$$

ÖR/ $f(x) = \cos(2x^3)$ fonk seri gösterimini bulunuz.

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots$$

$$\cos(2x^3) = 1 - \frac{(2x^3)^2}{2!} + \frac{(2x^3)^4}{4!} - \dots$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}x^6 + \frac{2^4}{4!}x^{12} - \dots$$

$$\cos(2x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{6n}$$

ÖR/ $f(x) = xe^{-2x}$ fonk seri gösterimizi bulunuz.

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$= e^{-2x} = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{(-2x)^2}{2!} + \dots + \frac{(-2x)^n}{n!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \dots + \frac{(-2)^n x^n}{n!} + \dots$$

$$xe^{-2x} = x - \frac{2x^2}{1!} + \frac{4x^3}{2!} + \dots + \frac{(-2)^n x^{n+1}}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^{n+1}$$

ÖR/ $\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{e^{2t}-1}{t^2}\, dt = ?$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{2t} = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{6} + \cdots$$

$$e^{2t} - 1 = \cancel{1} + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \cdots \cancel{-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{e^{2t}-1}{t^2}\, dt = \lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3}{t^2}\, dt$$

$$\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \left(\frac{2}{t} + 2 + \frac{4}{3}t + \cdots\right) dt$$

$$\lim_{x \to 0} \left[2\ln t + 2t + \frac{4}{3}\frac{t^2}{2} + \cdot \right|_x^{2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \left[2\ln 2x + \underbrace{4x}_{0} + \underbrace{\frac{2}{3}.4x^2}_{0} - 2\ln x \underbrace{- 2x}_{0} \underbrace{- \frac{2}{3}x^2}_{0} - \cdots\right]$$

$$\lim_{x \to 0} 2\left[\underbrace{\ln 2 + \ln x}_{\ln 2x \text{ bu şekilde yazdın}}\right] - 2\ln x = 2\ln 2$$

ÖR/ Kuvvet serilerinden yararlanarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k+1}} = \frac{9}{4}$$ olduğunu gösteriniz

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x|<1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \qquad |x|<1$$

$$\frac{2x}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-1} \qquad |x|<1$$

$x=1/3$ alalım. n den k ya geçmek için n'ye öyle bir değer verelim. $k=0$ olsun.

$$\underset{\downarrow \atop 2}{n} = k+2 \; \Big\} \; k=0$$

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

$$\frac{9}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k+1}}$$

ÖR/ $\ln(1+x)$ fonksiyonunun kuvvet serisini açılımını bu

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \Big|_0^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

$$\frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \qquad -1<x<1$$

Taylor Serisi

Bir f fonksiyonu bir x_0 noktasını içeren aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $x = x_0$ noktasında Taylor serisi

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ şeklindedir}$$

$x_0 = 0$ ise

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!} \quad \text{Maclaurin serisi olur.}$$

ÖR/ $f(x) = \frac{1}{x}$ tarafından $x_0 = 2$ noktasında üretilen Taylor serisini bulunuz. Bulduğunuz bu seri hangi aralıkta $\frac{1}{x}$'e yakınsar? ($\frac{1}{x}$'e eşittir)

$$f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \dots$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(2) = \frac{1}{2}$ $\quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f''(x) = \frac{2}{2^3}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}$ $\quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$ $\quad f'''(x) = -\frac{6}{2^4}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{2}{2^3}\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{6}{2^4}\frac{(x-2)^3}{6} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n + \dots$$

genel terimi nedir?

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2 - \frac{1}{2^4}(x-2)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2-\frac{1}{2^3}(x-2)^3+\dots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{x}$$

$0<x<4$ için $1/x$'e yakınsar.

$$\sum x^n=\frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

$$\left|-\frac{x-2}{2}\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{x-2}{2}\right|<1 \Rightarrow |x-2|<2$$

$$-2<x-2<2$$

$$0<x<4$$

Taylor polinomu:

$x=x_0$ noktasında üretilen n'. mertebeden taylor polinomu

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

dir.

ÖR/ $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $x=0$ da üretilen Taylor serisini ve polinomunu bulunuz.

$x=0$ Maclaurin Serisi

$f(x)=e^x \qquad f(0)=1$

$f^{(n)}(x)=e^x \qquad f^{(n)}(0)=1$

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ Taylor serisi}$$

Bu aynı zamanda e^x için Maclaurin serisidir.

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

$x=0$ da üretilen Taylor polinomu

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)}<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}}_{0}} \Rightarrow |x|<\infty$$

Sık kullanılan Taylor serileri

1) $\frac{1}{1-x} = 1+x+\dots+x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , |x|<1$

2) $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad , |x|<1$

3) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in R$

4) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \forall x \in R$

5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in R$

ÖR/ $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ integralinin 0,001 den küçük bir hata payı ile yaklaşık bir değerini bulunuz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \forall x \in R$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \quad \forall x \in R$$

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \right] dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!} - \frac{x^{15}}{15.7!} + \dots \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \,/\, - \dots$$

binde bir hata burada kesiyoruz.

ÖR/ $-5<x<1$ aralığında yakınsak olan

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$ serisinin temsil ettiği fonksiyonu bul.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x|<1$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3-x-2} = \frac{1}{1-x}$$

$\left|\frac{x+2}{3}\right|<1 \qquad |x+2|<3$

$-3<x+2<3 \Rightarrow -5<x<1$

bu gerçek altında bu seri bu fonksiyona yakınsar.

$-5<x<1$ yakınsaklık aralığında bu serinin yakınsadığı fonksiyon budur.

ÖR/ $f(x)=\ln(1+x)$ fonksiyonunun Maclaurin açılımını bulunuz.

$f(x)=\ln(1+x) \quad f'(x)=\frac{1}{1+x} \quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \quad f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}$

$f^{(4)}(x)=\frac{-3!}{(1+x)^4} \quad f^{(5)}(x)=\frac{4!}{(1+x)^5} \ \cdots \ f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(-1)^{n-1}$

$f(0)=0 \quad f'(0)=1 \quad f''(0)=-1 \quad f'''(0)=2!$

$f^{(4)}(0)=-3! \quad f^{(5)}(0)=4! \ \cdots \ f^{(n)}(0)=(n-1)!\,(-1)^{n-1}$

$$f(x)=\ln(1+x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$ elde edilir.

Yakınsaklık aralığını bulalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}}\right| = |x|\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}_{1}$$

$|x|<1$

$-1<x<1$ Y.A

$x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}$

$= -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{n}$ ıraksak

$x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ şarta bağlı yakınsak seri $\qquad -1<x\leq 1$ Y.A

ÖR/ $f(x)=\ln x$ fonk-nun $x_0=1$ de n-dereceden Taylor polinomunu bulunuz.

$f(x)=\ln x$ $\quad f(1)=0$ $\quad f''(x)=\frac{-1}{x^2}$ $\quad f''(1)=-1=-1!$

$f'(x)=1/x$ $\quad f'(1)=1$ $\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(1)=2=2!$

$f^{IV}(x)=\frac{-6}{x^4}$ $\quad f^{IV}(1)=-6=3!$

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

$$f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

$$P_n(x)=x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x-1)^n$$

ÖR/ $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ fonksiyonunun seri açılımını bulunuz

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{\underset{1-(-x)}{1+x}}=1-x+x^2+\dots+(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

$$\left(\int\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{1}{1+x}dx\right)=\int\frac{dx}{1-x}+\int\frac{dx}{1+x}=\int\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

$$-\ln(1-x)+\ln(1+x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}$$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ limitini serilerden yararlanarak çözünüz.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \left(\frac{1}{3!} \right)}{1}$$

$$= 0$$

ÖR/ $f(x) = e^{x^2} - e^{-x^2}$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$ limitini seriler yardımıyla belirleyiniz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x \in R$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right) - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2 \cdot \frac{x^6}{3!}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} \left(2 + \frac{2x^3}{3!} + \dots \right)}{\cancel{x^2}}$$

$$= 2$$