Diferansiyel Denklemler

$y=f(x)$ fonksiyonu x bağımsız değişkeni ve bu fonksiyonun sınırlı sayıda herhangi mertebeden türevleri arasında kurulmuş olan bağıntıya adi dif denklem yada diferansiyel denklem denir. En genel biçimde tanımlamak gerekirse bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içeren diferansiyel denklem denir.

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)})=0$$

veya

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$ şeklindedir.

$y''+xy=0$ bir diferansiyel denklemdir.

$y^3+y=0$ denklem içerisinde türev olmadığı için diferansiyel denklem değildir.

$y'''+y=0$ bir dif denklemdir.

Mertebe = En yüksek türev mertebesi dif denklemin mertebesidir.

Derece = En yüksek mertebeden türevin derecesidir.

Lineer Dif denklem: Bir diferansiyel denklemde fonksiyon (y) ve fonksiyonun türevleri birinci dereceden ise bu dif denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Aksi taktirde non-lineer dif denklemdir.

Lineer diferansiyel denklemin özellikleri

1) Bir denklemin lineer olabilmesi için bağımlı değişken ve türevlerinin hepsinin kuvveti 1 olmalıdır.

2) Lineer bir dif denklemde bağımlı değişken ve türevleri hiçbir zaman çarpım durumunda bulunamaz.

$xy'y - 5\sin x = 0$ lineer dif denklem değildir.

* $y' - 2y = xe^{x}$ 1 mertebe 1. derece Lineer dif denk
* $y'' + xy' = 0$ 2 mertebe 1 derece Lineer dif denk
* $y'' + 2xy'^{2} = e^{x}$ 2 mertebe 1 derece non-lineer
* $y'^{3} + 2xy'^{2} = e^{x}$ 1 mertebe 3 derece non-lineer
* $y' = \sqrt{1+y''} \Rightarrow (y')^2 = 1+y''$, 2. mertebe 1. derece, Non-lineer

Diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması;

Bir dif denk derecesine göre sınıflandırılırsa

1) Lineer
2) Non-Lineer

Bir dif denk mertebesine göre sınıflandırılırsa

1) Birinci mertebeden
2) Yüksek mertebeden dif denk

Bir dif denk türevlerine göre sınıflandırılsa

1) Adi dif denklem
2) Kısmi türevli dif denklem

Tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklem denir.

$y' + xy = 0$ adi dif denklemdir. x bağımsız değişken, y ise bağımlı değişkendir.

İçerisinde iki ve daha fazla bağımsız değişkeni bulunduran diferansiyel denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

x ve y bağımsız değişken
z bağımlı değişkendir.

Diferansiyel denklemin katsayılarına göre;

1) Sabit katsayılı dif denklem
2) Değişken katsayılı dif denklem

Bir lineer dif denklemde tüm katsayılar sabit ise denkleme sabit katsayılı dif denklem denir.
Fonksiyonun katsayılarından en az biri bağımsız değişken ise denkleme değişken katsayılı dif denklem denir.

$y'' - 3y' - 6y = 6x + 3$ sabit katsayılı dif denklem
$x^2 y'' + xy' + 6y = \ln x$ değişken " " " dır

Bir diferansiyel denklemin Çözümü

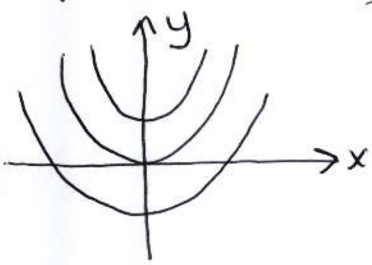
$y' = 2x \qquad \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \int dy = \int 2x\,dx \qquad y = x^2 + c$

Genel Çözüm: Bir diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve içinde denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit (parametre) barındıran fonksiyonlara diferansiyel denklemin genel çözümü denir.

Bir diferansiyel denklemin genel çözümü bir eğri ailesidir.

$y' = 2x$ dif denk genel çözüm $y = x^2 + c$ parabol ailesidir.

$y = x^2 + c$ genel çözüm



$F(x, y, y') = 0$ 1. mertebeden bir dif denklem

genel çözümü $G(x, y, c) = 0$ dır.

$F(x, y, y', y'') = 0$ 2. mertebeden $G(x, y, c_1, c_2) = 0$ dır

$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ n. mertebeden $G(x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0$ dır.

Özel Çözüm;

Genel çözümden elde edilen çözüme denir.

Eğri ailesinin her bir eğrisi özel çözümdür.

Keyfi sabit bulundurmaz.

ÖR/ $y' = 2x$ dif denk $y = x^2 + c$ genel çözüm $y = x^2 + 1$ özel çözüm

Tekil (Singüler) çözüm;

Genel çözümden elde edilmeyen çözümdür.

Lineer olmayan özellikle 1. mertebeden olan diferansiyel denklemler için kullanılan çözümdür.

Diferansiyel Denklemlerin Oluşturulması;

Genel çözümü $G(x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0$ olan dif denklemi bulalım.

genel çözümde n tane keyfi sabit var. Bunun için dif denklem n. mertebedendir. Keyfi sabit kadar türev al.

n tane denklem + Genel denklemden $c_1, c_2 \ldots c_n$ yok edilerek $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ dif denklemi elde edilir.

Başlangıç şartları: Diferansiyel denklemin genel çözümünden, özel çözümüne geçebilmemizi sağlayan şartlar bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilmişse bu şartlara başlangıç şartları denir.

$$y'' - 3y' + y = 2xe^{-4x}$$
$$y(2) = 5, \quad y'(2) = -3$$
} başlangıç değer problemi

Bir diferansiyel denklemin genel çözümünden özel bir çözümü bulunabilir.
Bunun için keyfi sabitlerin sayısı kadar şart verilmelidir. (Başlangıç değer problemi)

ÖR/ $y'' + y = 0$ denkleminin genel çözümü
$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ dir.

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ için özel çözüm $y = \sin x$ dir.

$x = 0 \quad y = 0$

$y' = 1$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
$$0 = c_1 \cos 0 + \underbrace{c_2 \sin 0}_{0}$$
$$c_1 = 0$$
$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$
$$1 = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0$$
$$c_2 = 1$$

$y = \sin x$ özel çözüm.

Ör/ $y'+y-\sin x-\cos x+1=0$ dif denk verilsin.

$y=\sin x-1$ bu denk bir çözümüdür.

$y'=\cos x$

$\cos x+\sin x-1-\sin x-\cos x+1=0$ dır.

Ör/ Genel çözümü $y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$ olan diferansiyel denklemi elde ediniz.

$$y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$$

$$y'=-\frac{c_1}{x}\sin(\ln x)+\frac{c_2}{x}\cos(\ln x)$$

$$y''=\frac{c_1}{x^2}\sin(\ln x)\underbrace{-\frac{c_1}{x^2}\cos(\ln x)}-\frac{c_2}{x^2}\cos(\ln x)\underbrace{-\frac{c_2}{x^2}\sin(\ln x)}$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}\left[c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)\right]\underbrace{+\frac{c_1}{x^2}\sin(\ln x)-\frac{c_2}{x^2}\cos(\ln x)}_{-\frac{1}{x}\left[-\frac{c_1}{x}\sin(\ln x)+\frac{c_2}{x}\cos(\ln x)\right]}$$

$$\boxed{y''=-\frac{1}{x^2}y-\frac{1}{x}y'}$$

dif denk elde edilir.

ÖR/ $y = cx^2$ eğri ailesinin dif denk kurunuz.

$y' = 2cx$ $\qquad c = \frac{y}{x^2}$

$y' = 2 \cdot \frac{y}{x^2} \cdot x$

$y' = \frac{2y}{x}$ $\qquad xy' - 2y = 0$ dif denk elde edilir.

ÖR/ $y = A^x$ eğri ailesinin dif denk kur.

$y' = A^x \ln A$ $\qquad y = A^x$

$\ln y = x \ln A$

$y' = y \cdot \frac{\ln y}{x}$ $\qquad \frac{\ln y}{x} = \ln A$

$xy' - y \ln y = 0$ dif denk bulunur.

ÖR/ $\frac{y}{x} - \arcsin\left(\frac{\ln c}{x}\right) = 0$ eğri ailesinin dif denk kurunuz.

$\frac{y}{x} = \arcsin\left(\frac{\ln c}{x}\right)$

$\sin\frac{y}{x} = \frac{\ln c}{x}$

$\frac{y'x - y}{x^2} \cos\frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \ln c$

$\frac{y'x - y}{x^2} \cos\frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} x \sin\frac{y}{x}$

$y'x - y = -x \tan\frac{y}{x}$

$y' = \frac{y}{x} - \tan\frac{y}{x}$ dif denk bulunur.

ÖR/ c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $(x>0)$

$$y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1}$$ eğri ailesinin

dif denk bulunuz.

$$y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1}$$

$$y' = -\frac{1}{2} c_1 x^{-3/2} - c_2 x^{-2}$$

$$y'' = \frac{3}{4} c_1 x^{-5/2} + 2c_2 x^{-3}$$

$$5xy' = -\frac{5}{2} c_1 x^{-1/2} - 5c_2 x^{-1}$$

$$+\ 2x^2 y'' = \frac{3}{2} c_1 x^{-1/2} + 4c_2 x^{-1}$$

$$5xy' + 2x^2 y'' = -c_1 x^{-1/2} - c_2 x^{-1} = -y$$

$$5xy' + 2x^2 y'' + y = 0$$ dif denk elde edilir.

Birinci Mertebeden diferansiyel denklemler

$f(x, y, y') = 0$ şeklindeki diferansiyel denklemlerdir. Birinci mertebeden dif denklemlerin çözümü $G(x, y, c) = 0$ şeklindedir.

Değişkenlerine ayrılabilen dif denklemler:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ dif denklemini gözönüne alalım.

$$M(x,y) = f_1(x)\, g_1(y) \qquad N(x,y) = f_2(x)\, g_2(y)$$

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\, dy = 0$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\, dy = 0$$ integre edilirse

$F(x) + G(y) = c$ şeklinde genel çözüm bulunur.

ÖR/ $dy + e^{x+y}\, dx = 0$ dif denk çözünüz.

$$dy = -e^{x} . e^{y}\, dx$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int -e^x\, dx \Rightarrow \int e^{-y}\, dy = -\int e^x\, dx$$

$$-e^{-y} = -e^{x} + c$$

bulunur.

ÖR/ $y = \ln y'$ dif denk çözünüz.

$$e^y = y' \Rightarrow e^y = \frac{dy}{dx} \qquad \int dx = \int \frac{dy}{e^y} = \int e^{-y} dy$$

$$x = -e^{-y} + c$$

genel çözümü bulunur.

ÖR/ $\frac{dy}{dx} + e^x y = e^x y^2$ dif denk çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = e^x (y^2 - y)$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int e^x dx$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$(y-1) \quad y$$

$$A = -1 \quad B = 1$$

$$\int -\frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} = \int e^x dx$$

$$-\ln y + \ln (y-1) = e^x + C$$ genel çözüm bulunur.

$$\ln \left[\frac{(y-1)}{y} \right] = e^x + C$$

Değişkenlerine ayrılabilen hale getirilebilen diferansiyel denklemler;

$y' = f(ax+by+c)$ dif denklemini gözönüne alalım.

$ax+by+c=t$

$a+by'=t' \Rightarrow y' = \dfrac{t'-a}{b}$

$$\frac{t'-a}{b} = f(t) \Rightarrow t' = a + f(t)b$$

$$\frac{dt}{dx} = a + f(t)b$$

$$\int dx = \int \frac{dt}{a+f(t)b}$$

$$x = F(t) + c$$

$$x = F(ax+by+c) + c \text{ genel çözüm}$$

ÖR/ $y' = \tan^2(x+y)$ dif denkleminin genel çöz bulunuz.

$x+y=t$

$1+y'=t' \Rightarrow y' = t'-1$

$t'-1 = \tan^2 t \qquad t' = \tan^2 t + 1$

$$\frac{dt}{dx} = \tan^2 t + 1$$

$$\int dx = \frac{dt}{\tan^2 t + 1} = \int \frac{dt}{\sec^2 t} = \int \cos^2 t\, dt$$

$$x = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{4}\sin 2t + c$$

$$x = t/2 + 1/4 \sin 2(x+y) + c$$

Homojen Diferansiyel Denklemler

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ ise $f(x,y)$ fonksiyonuna n. dereceden homojen fonksiyon denir.

ÖR/ $f(x,y) = x^2 + xy$ fonksiyonunu alalım.

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + \lambda x \lambda y = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy$$
$$= \lambda^2 [x^2 + xy]$$
$$= \lambda^2 f(x,y)$$

$f(x,y) = x^2 + xy$ 2. dereceden homojen fonksiyondur.

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde $M(x,y)$ ve $\theta(x,y)$ aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise bu diferansiyel denkleme homojen diferansiyel denklem denir.

veya $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ise diferansiyel denkleme homojen dif denklem denir.

$\frac{y}{x} = u \quad y = xu \quad y' = u + xu'$ şeklinde çözülür.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$u + xu' = f(u) \Rightarrow xu' = f(u) - u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u} \Rightarrow \ln x = F(u) + c$$
$$\ln x = F(y/x) + c$$ şeklinde dif denklemin çözümü bulunur.

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dif denkleminde $M(x,y)$, $N(x,y)$ aynı dereceden homojen fonk ise $y = xu \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx$ şeklindede dif denklem çözülür.

ÖR/ $(x^3+y^3)\,dx - xy^2\,dy = 0$ dif denk çözünüz.

I yol: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3/x^3}{xy^2/x^3} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$\dfrac{y}{x} = u \qquad y = xu \qquad \dfrac{dy}{dx} = y' = u + xu'$

$$u + xu' = \frac{1+u^3}{u^2} \Rightarrow u^3 + xu^2u' = 1+u^3$$

$$xu^2\frac{du}{dx} = 1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int u^2\,du$$

$$\ln x = \frac{u^3}{3} + c$$

$$\ln x = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + c$$

Genel çözüm

II yol: $(x^3+y^3)\,dx - xy^2\,dy = 0$

$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$

$$(x^3+u^3x^3)\,dx - xu^2x^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$x^3\,dx + \cancel{u^3x^3\,dx} - \cancel{x^3u^3\,dx} - x^4u^2\,du = 0$$

$$x^3\,dx - x^4u^2\,du = 0$$

$$\int \frac{x^3}{x^4}\,dx = \int u^2\,du$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int u^2\,du$$

$$\ln x = u^3/3 + c$$

$$\ln x = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + c$$

Genel Çözüm.

ÖR/ $(x - y\ln y + y\ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$

dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$(x - y(\ln y - \ln x))dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$$

$$\left(x - y\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\ln\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$\left(1 - \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + \ln\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$ homojen dif denk

$y = ux$, $dy = u\,dx + x\,du$

$$(1 - u\ln u)dx + \ln u\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1 - \cancel{u\ln u} + \cancel{u\ln u})dx + x\ln u\,du = 0$$

$$dx + x\ln u\,du = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int \ln u\,du = 0$$

$$\ln x + u\ln u - u = C$$

$$\ln x + \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = C$$

genel Çözüm

ÖR/ $\left(x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)dx + x\,dy = 0$, $y(1) = \pi/4$

şartını sağlayan özel çözümü bulunuz.

x'e böl

$$\left(\cos^2\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$$

$y/x = u \qquad y = xu \qquad y' = xu' + u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \cos^2\frac{y}{x}}{1}$$

$$xu' + u = u - \cos^2 u$$

$$xu' + \cancel{u} = \cancel{u} - \cos^2 u$$

$$x\frac{du}{dx} = -\cos^2 u$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{du}{\cos^2 u} = -\int \sec^2 u$$

$$\ln x = -\tan u + c$$

$$\ln x = -\tan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

$x = 1 \qquad y = \pi/4$

$$\ln 1 = -\tan\left(\frac{\pi/4}{1}\right) + c$$

$$0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$$

$\ln x = -\tan\left(\frac{y}{x}\right) + 1$ özel çözüm.

ÖR/ $x\cos\frac{y}{x}\cdot y' = y\cos\frac{y}{x} + x$ dif denk çözünüz.

$$x\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} + x$$

$$\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + 1$$

$$\left(\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx - \cos\frac{y}{x}\,dy = 0$$

$y = xu \qquad dy = x\,du + u\,dx$

$$(u\cos u + 1)dx - \cos u\cdot(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$\cancel{u\cos u\,dx} + dx - x\cos u\,du - \cancel{u\cos u\,dx} = 0$$

$$dx - x\cos u\,du = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\cos u\,du \Rightarrow \ln x = \sin u + c$$

$$x = e^{\sin u + c}$$

$$x = e^{\sin y/x}\cdot \underbrace{e^{c}}_{c}$$

$$\underline{y = e^{y/x}\cdot c}$$ Genel Çözüm

ÖR/ $\left(x\cos^2\frac{y}{x} - y\right)dx + x\,dy = 0$, $y(1) = \pi/4$

şartını sağlayan özel çözümünü bulunuz.

Her iki tarafı x'e bölelim.

$$\left(\cos^2\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right)dx + dy = 0 \qquad y/x = u \qquad y = xu$$

$$y' = u + u'x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\cos^2\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right)}{1}$$

$$\cancel{u} + u'x = -\cos^2 u + \cancel{u}$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x = -\cos^2 u \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int -\frac{du}{\cos^2 u} \Rightarrow \ln x = -\tan u + c$$

$$\ln x = -\tan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

$x = 1 \quad y = \pi/4$

$$\ln 1 = -\tan(\pi/4) + c$$

$$0 = -1 + c$$

$$c = 1$$

$$\ln x = -\tan\left(\frac{y}{x}\right) + 1$$

Özel Çözüm

Homojen hale dönüştürülebilen dif denklemler;

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx + (a_2x+b_2y+c_2)dy = 0$$

c_1, c_2 den dolayı homojen değil

c_1 ve c_2 yi yok edeceğiz.

a_1x+b_1y ve a_2x+b_2y arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

I durum;

a_1x+b_1y
a_2x+b_2y $\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ise

lineer bağımsız

$x = x_1 + h \quad y = y_1 + k$ dönüşümü yapılır. $dx = dx_1 \quad dy = dy_1$

Dif denklemde yerine yazalım.

$$(a_1(x_1+h)+b_1(y_1+k)+c_1)dx_1 + (a_2(x_1+h)+b_2(y_1+k)+c_2)dy_1 = 0$$

$$(a_1x_1+b_1y_1+\underbrace{a_1h+b_1k+c_1}_{0})dx_1 + (a_2x_1+b_2y_1+\underbrace{a_2h+b_2k+c_2}_{0})dy_1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a_1h+b_1k+c_1 &= 0 \\ a_2h+b_2k+c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ dan } h \text{ ve } k \text{ bulunur.}$$

$(a_1x_1+b_1y_1)dx_1 + (a_2x_1+b_2y_1)dy_1 = 0$ homojen dif denk

çözülüp $x_1 = x - h \quad y_1 = y - k$ yazılır.

ÖR/ $(x+y-3)dx + (-x+y+1)dy = 0$ dif denk çözünüz

$x+y$
$-x+y$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{aligned} x &= x_1+h \\ y &= y_1+k \end{aligned} \quad \begin{aligned} dx &= dx_1 \\ dy &= dy_1 \end{aligned}$

$$(x_1+h+y_1+k-3)dx_1 + (-x_1-h+y_1+k+1)dy_1 = 0$$

$$(x_1+y_1+\underbrace{h+k-3}_{0})dx_1 + (-x_1+y_1\underbrace{-h+k+1}_{0})dy_1 = 0$$

$$(x_1+y_1)dx_1 + (-x_1+y_1)dy_1 = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$

homojen dif denk elde edilir.

$h+k-3=0$
$-h+k+1=0$

$h+k=3$
$-h+k=-1$

$2k=2 \quad k=1$
$h=2$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 / \cancel{x_1}}{x_1 - y_1 / x_1} = \frac{1 + y_1/x_1}{1 - y_1/x_1}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = u \qquad y_1 = u x_1$$

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = u + u' x_1$$

$$u + u' x_1 = \frac{1+u}{1-u} \qquad u' x_1 = \frac{1+u}{1-u} - u$$

$$u' x_1 = \frac{1 + u - u(1-u)}{1-u}$$

$$u' x_1 = \frac{1 + \cancel{u} - \cancel{u} + u^2}{1-u}$$

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{(1-u)\,du}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u\,du}{1+u^2}$$

$1+u^2 = t$
$2u\,du = dt$
$\int \frac{dt}{2t}$

$$\ln x_1 = \text{Arctan } u - \frac{1}{2} \ln (1+u^2) + c$$

$$\ln x_1 = \text{Arctan } \frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y_1^2}{x_1^2}\right) + c$$

$$\left.\begin{matrix} x = x_1 + h & x = x_1 + 2 \\ y = y_1 + k & y = y_1 + 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = x - 2 \\ y_1 = y - 1 \end{matrix}$$

$$\ln (x-2) = \text{Arctan } \frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{(y-1)^2}{(x-2)^2}\right) + c$$

Genel Çözümü bulur.

II durum;

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ a_1x+b_1y, a_2x+b_2y lineer bağımlı

$a_1x+b_1y=u$ dönüşümü ile dif denklem değişkenlerine ayrılabilen hale gelir.

$a_1x+b_1y=t$

$a_1dx+b_1dy=dt$

ÖR/ $(x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy=0$

$x+y$

$2x+2y$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$x+y=t$

$dx+dy=dt \Rightarrow dy=dt-dx$

$(t+1)dx+(2t+1)(dt-dx)=0$

$(t+1)dx+(2t+1)dt-(2t+1)dx=0$

$(t+1-2t-1)dx+(2t+1)dt=0$

$(-t)dx+(2t+1)dt=0$

$\int dx = \int \frac{2t+1}{t}dt$

$x=2t+\ln t+c$

$x=2(x+y)+\ln(x+y)+c$

genel çözümü bulunur.

Tam Diferansiyel Denklemler

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dif denklemi $u(x,y) = c$ gibi bir fonksiyonun toplam diferansiyeli ise tam dif adını alır.

$u(x,y)$ nin toplam diferansiyeli

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$ şeklinde idi.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Buradan

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$$ olur. $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$ $$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Shwarz teo $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ dir.

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$ tam dif olma koşulu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\int \partial u = \int M(x,y)dx$$

$$u = K(x,y) + R(y)$$ [y ye göre türev al]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[K(x,y)\right] + \frac{dR}{dy}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[K(x,y)\right] + \frac{dR}{dy} \Rightarrow \frac{dR}{dy}$$ bulunur.

İntegre edilir.

$R(y)$ bulunur.

u da yerine yazılır.

çözüm $u(x,y)=c$ şeklinde bulunur.

Diğer taraftan

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \Rightarrow \int \partial u=\int N(x,y)\,dy$$

$$u = S(x,y)+R(x) \quad [x\text{'e göre türev al}]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x,y)\right]+\frac{dR}{dx}$$

$$M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x,y)\right]+\frac{dR}{dx}$$

$\frac{dR}{dx}$ bulunur. İntegre edilir. $R(x)$ bulunup u da yerine yazılır.

İki şekilde de yaptığınız da dif denklemin aynı çözümünü bulursunuz.

ÖR/ $\underbrace{(x^2+y^2/x)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{2y\ln x}_{N(x,y)}\,dy=0$ dif denk çözünüz.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x} \quad \text{tam dif}$$

$$(x^2+y^2/x)dx+2y\ln x\,dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+\frac{y^2}{x} \Rightarrow \int \partial u=\int\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)dx$$

$$u(x,y)=\frac{x^3}{3}+y^2\ln x+R(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\ln x+\frac{dR}{dy}$$

$$2y\ln x=2y\ln x+\frac{dR}{dy} \Rightarrow \frac{dR}{dy}=0$$

$$\int dR=\int dy \qquad R(y)=k$$

$$u(x,y)=x^3/3+y^2\ln x+k=c \qquad \boxed{x^3/3+y^2\ln x=c}$$

$c-k=c$

Bu şekilde de çözebilirsiniz.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \ln x \qquad \int \partial u = \int 2y \ln x \, dy$$

$$u(x,y) = \frac{2y^2}{2} \ln x + R(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{dR}{dx}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{x} = \frac{y^2}{x} + \frac{dR}{dx}$$

$$\frac{dR}{dx} = x^2$$

$$\int dR = \int x^2 dx$$

$$R(x) = \frac{x^3}{3} + k$$

$$u(x,y) = y^2 \ln x + \frac{x^3}{3} + k = C$$ genel çözümü bulur.

$c - k = c$ $$\boxed{y^2 \ln x + \frac{x^3}{3} = c}$$

ÖR/ $\underbrace{\frac{y}{x}}_{M} dx + \underbrace{(y^3 + \ln x)}_{N} dy = 0$ dif denklemini çözünüz

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$$ Tam dif

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y^3 + \ln x \Rightarrow \int \partial u = \int (y^3 + \ln x) dy$$

$$u(x,y) = y^4/4 + y \ln x + R(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} + \frac{dR}{dx} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y}{x} + \frac{dR}{dx}$$

$$dR/dx = 0$$

$$\int dR = \int 0 \, dx$$

$$R(x) = k$$

$$u(x,y) = y^4/4 + y \ln x + k = C$$

$c - k = c_1$ diyelim $\quad y^4/4 + y \ln x = c_1$ Genel Çözüm

İntegrasyon çarpanı ile tam diferansiyel hale getirme;

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dif denklemi verilsin.

Eğer $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ise bazı durumlarda dif denklem integrasyon çarpanı kullanılarak tam hale dönüşebilir.

$\lambda(x,y)$ integrasyon çarpanı olsun.

$$\underbrace{\lambda(x,y)M(x,y)}_{M_1(x,y)}dx + \underbrace{\lambda(x,y)N(x,y)}_{N_1(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x,y)M(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,y)N(x,y)\right]$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}M + \lambda \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}N + \lambda \cdot \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(*) \quad \lambda\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} - M\frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

1) $\lambda = \lambda(x)$ ise $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$ dır.

(*) denklemi

$$\lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

$$\int \frac{\partial \lambda}{\lambda} = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

$$\boxed{\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$$

2) $\lambda = \lambda(y)$ ise $\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$ dır.

* denklemi

$$\lambda \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = -M \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

$$\int \frac{\partial \lambda}{\lambda} = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

$$\boxed{\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$$

ÖR/ $(x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = y$ Tam dif değil

$$\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx = \int \frac{2y-y}{xy} dx = \int \frac{y}{xy} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$\ln \lambda = \ln x \qquad \underline{\lambda = x}$

$x(x^2+y^2)dx + x^2y\,dy = 0$

$(x^3+xy^2)dx + x^2y\,dy = 0$

$\dfrac{\partial M_1}{\partial y} = 2xy \qquad \dfrac{\partial N_1}{\partial x} = 2xy$ tam dif oldu.

$(x^3+xy^2)dx + x^2y\,dy = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^3+xy^2 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2y$

$$\int \partial U = \int (x^3 + xy^2)\,dx$$

$$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + R(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}y + \frac{dR}{dy}$$

$$x^2y = x^2y + \frac{dR}{dy} \Rightarrow \frac{dR}{dy} = 0 \qquad \int dR = \int 0\,dy$$

$$R(y) = k$$

$$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + k = C$$

$$C - k = c_1$$

$$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 = c_1$$ genel çözümü bulunur.

ÖR/ $(xy+1)y\,dx + (2y-x)\,dy = 0$ dif denk genel çözümünü bulunuz.

$$(xy^2 + y)\,dx + (2y-x)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$ Tam dif değil

$$\ln \lambda = \int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx = \int \frac{2xy+1+1}{2y-x}dx$$

$$= \int \frac{2xy+2}{2y-x}dx = \int \frac{2(xy+1)}{2y-x}dx$$

x'e bağlı integrasyon çarpanı bulamadık

Diğerinden

$$\ln \lambda = \int \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}dy = \int \frac{-1-2xy-1}{y(xy+1)}dy$$

$$= \int \frac{-2\cancel{(xy+1)}}{y\cancel{(xy+1)}}dy = \int -\frac{2}{y}dy$$

$$\ln \lambda = \ln y^{-2} \Rightarrow \lambda = y^{-2}$$

$$\lambda = 1/y^2$$

$$\frac{1}{y^2}(xy^2+y)dx + \frac{1}{y^2}(2y-x)dy = 0$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{1}{y}\right)}_{M_1}dx + \underbrace{\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)}_{N_1}dy = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$ tam dif oldu.

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x+\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{y}-\frac{x}{y^2} \Rightarrow \int \partial u = \int\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

$$u(x,y) = 2\ln y - x\cdot\left(-\frac{1}{y}\right) + R(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{dR}{dx}$$

$$x+\frac{1}{y} = \frac{1}{y}+\frac{dR}{dx} \Rightarrow \frac{dR}{dx} = x$$

$$\int dR = \int x\,dx$$

$$R(x) = \frac{x^2}{2}+k$$

$$u(x,y) = 2\ln y + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + k = C$$

$$c-k = c_1 \qquad 2\ln y - \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c_1$$

genel Çözüm.

ÖR/ $\left(x - y\sin\frac{y}{x}\right)dx + x\sin\frac{y}{x}\,dy = 0$ dif denk çözünüz

Bu soru aynı zamanda homojen dif denk dir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y\sin\frac{y}{x}}{x\sin\frac{y}{x}} = \frac{\frac{x - y\sin y/x}{x}}{\frac{x\sin y/x}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{y}{x}\sin y/x}{\sin y/x}$$

buradan da görebilirsiniz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin\frac{y}{x} - y\cdot\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1\cdot\sin\frac{y}{x} + x\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

Tam dif değil.

$$\ln\lambda = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx = \int \frac{-\sin\frac{y}{x} - \cancel{\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}} - \sin\frac{y}{x} + \cancel{\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}}{x\sin y/x}\,dx$$

$$\ln\lambda = \int \frac{-2\sin y/x}{x\sin y/x}\,dx = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln x = \ln x^{-2}$$

$$\lambda = x^{-2} \qquad \lambda = 1/x^2$$

$$\frac{1}{x^2}\left(x - y\sin\frac{y}{x}\right)dx + \frac{1}{x^2}\left(x\sin\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)}_{M_1}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)}_{N_1}dy = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}$$

Tam dif

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} \qquad \int \partial u = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)dx$$

$$u(x,y) = \ln x - \cos\frac{y}{x} + R(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} + \frac{dR}{dy}$$

$$\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} = \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} + \frac{dR}{dy}$$

$$dR/dy = 0 \qquad R(y) = k$$

$$u(x,y) = \ln x - \cos\frac{y}{x} + k = C$$

$$\ln x - \cos y/x = C$$ Genel Ç.

Lineer Diferansiyel Denklemler.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$ şeklindeki diferansiyel denklemlere lineer dif denklem denir.

1) Sabitin değişimi Yöntemi;

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx$$

$$\ln y = \int -p(x)dx + \ln c$$

$$\ln \frac{y}{c} = \int -p(x)dx$$

$$\frac{y}{c} = e^{-\int p(x)dx}$$

$$y = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$y = c e^{-\int p(x)dx}$ türevini alalım. $c = c(x)$ olarak kabul ediliyor.

$$\frac{dy}{dx} = c' e^{-\int p(x)dx} + c\left(-p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\right)$$

Dif denklemde y ve $\frac{dy}{dx}$ yerine yaz.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$c' e^{-\int p(x)dx} + c\left(-\cancel{p(x)}\, e^{-\int p(x)dx}\right) + \cancel{p(x)}\, c\, e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{dc}{dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\int dc = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx$$

$$c = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + k$$

$$y = c\, e^{-\int p(x)dx}$$

$$y = \left[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + k\right] e^{-\int p(x)dx}$$ bulunur.

ÖR/ $y' = y\cot x + \sin x$ dif denk çözünüz.

$\dfrac{dy}{dx} - y\cot x = \sin x$ lineer dif denk

$\dfrac{dy}{dx} - y\cot x = 0$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx} = y\cot x$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln y = \ln \sin x + \ln c$$

$$y = c \cdot \sin x$$

$y' = c'\sin x + c\cdot\cos x$

$y' = y\cot x + \sin x$ de y ve y' yerine yaz.

$$c'\sin x + c\cdot\cos x = c\cdot\sin x\cdot\cot x + \sin x$$

$$c'\sin x + c\cdot\cancel{\cos x} = c\,\cancel{\sin x}\cdot\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}} + \sin x$$

$$c'\sin x = \sin x \Rightarrow \frac{dc}{dx} = 1 \quad \int dc = \int dx$$

$$c = x + k$$

$y = c\sin x \Rightarrow y = (x+k)\sin x$ genel Çözüm

ÖR/ $y' + y\sin x = x e^{\cos x}$ dif denk çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = x e^{\cos x}$$ lineer dif denk

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -y \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\sin x \, dx$$

$$\ln y = \cos x + \ln c$$

$$\ln \frac{y}{c} = \cos x \Rightarrow y = c \cdot e^{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = c' e^{\cos x} + c.(-\sin x) e^{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = x e^{\cos x}$$

$$c' e^{\cos x} - \cancel{c \sin x \, e^{\cos x}} + \cancel{c e^{\cos x} \sin x} = x e^{\cos x}$$

$$c' e^{\cos x} = x e^{\cos x}$$

$$c' = x \Rightarrow \frac{dc}{dx} = x \qquad \int dc = \int x \, dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y = c e^{\cos x}$$

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + k\right) e^{\cos x}$$ genel Çözüm

2. İntegrasyon çarpanı ile

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$[\underbrace{p(x)y - q(x)}_{M}]dx + \underbrace{1}_{N} \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx = \int \frac{p(x) - 0}{1} dx = \int p(x) dx$$

$$\lambda = e^{\int p(x)dx}$$

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x) e^{\int p(x)dx}}\, y = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx} \cdot y\right) = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$\int d\left(e^{\int p(x)dx} \cdot y\right) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

$$e^{\int p(x)dx} \cdot y = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + k$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + k\right]$$

ÖR/ $y' = y\cot x + \sin x$ dif denklemini integrasyon çarpanı ile çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x = \sin x$$ Lineer dif denk

$$p(x) = -\cot x$$

$$\lambda = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\cot x\,dx} = e^{\int -\frac{\cos x}{\sin x}dx}$$

$$\lambda = e^{-\ln(\sin x)}$$

$$\lambda = (\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\sin x}\left(\frac{dy}{dx} - y\cot x\right) = \frac{1}{\sin x}\cdot \sin x$$

$$\left(\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{dy}{dx} - y\frac{\cot x}{\sin x}\right) = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{1}{\sin x}\right) = 1$$

$$\int d\left(y\cdot\frac{1}{\sin x}\right) = \int dx$$

$$y\cdot\frac{1}{\sin x} = x + c$$

$$y = (x+c)\sin x$$

Bernoulli Dif Denklemi

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x)y^n$ şeklindeki dif denkleme bernoulli dif denklemi denir.

$z = \frac{1}{y^{n-1}}$ dönüşümü yapılır.

$z = y^{1-n}$ $\quad z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{1-n-1} \cdot y'$

$z' = (1-n)\,y^{-n} \cdot y'$

$z' = \frac{(1-n)}{y^n} y'$

$y' = \frac{y^n}{(1-n)} \cdot z'$

ÖR/ $y' + y = xy^3$ dif denk çözünüz.

Bernoulli dif denk.

$z = \frac{1}{y^{n-1}}$ $\quad n = 3$

$z = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$ $\quad z' = (-2)\,y^{-3} \cdot y'$

$-\frac{z'}{2} = \frac{y'}{y^3}$

$y' + y = xy^3$

$\frac{y'}{y^3} + \frac{y}{y^3} = x \Rightarrow -\frac{z'}{2} + z = x \Rightarrow z' - 2z = -2x$

lineer dif denk bulunur.

$z' - 2z = -2x$ lineer dif denk integrasyon çarpanı ile çözelim.

$p(x) = -2$ $\quad \lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2dx}$

$= e^{-2x}$

$$z' - 2z = -2x$$

$$e^{-2x}(z' - 2z) = -2x e^{-2x}$$

$$\underbrace{z' e^{-2x} - 2z e^{-2x}}_{} = -2x e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(z e^{-2x}\right) = -2x e^{-2x}$$

$$\int d\left(z e^{-2x}\right) = \int -2x e^{-2x}\,dx$$

$$z e^{-2x} = -2\left[-\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}\right] + k$$

$x = u$

$dx = du$

$e^{-2x} dx = dv$

$-\frac{1}{2} e^{-2x} = v$

$uv - \int v\,du$

$-\frac{x}{2} e^{-2x} - \int \frac{1}{2} e^{-2x} dx$

$-\frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$

$$z e^{-2x} = +x e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + k$$

$$z = +x - \frac{1}{2} + k \cdot e^{2x}$$

$$\downarrow$$

$$z = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = x - \frac{1}{2} + k e^{2x}$$

$$y^2 = \frac{1}{x - \frac{1}{2} + k e^{2x}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x - \frac{1}{2} + k e^{2x}}}$$

Genel Gözum.

ÖR/ $y' + y\tan x = y^3 \sec^3 x$ dif denk çözünüz.

$n = 3$ $\quad z = \dfrac{1}{y^{n-1}} = \dfrac{1}{y^2}$ $\quad z = y^{-2}$

$z' = -2y^{-3} \cdot y'$

$-\dfrac{z'}{2} = \dfrac{y'}{y^3}$

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{y \cdot \tan x}{y^3} = \frac{y^3 \sec^3 x}{y^3}$$

$$-\frac{z'}{2} + z\tan x = \sec^3 x$$

$z' - 2z\tan x = -2\sec^3 x$ Lineer dif denk

$p(x) = -2\tan x$ $\quad \lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2\tan x\, dx}$

$\lambda = e^{-2\int \frac{\sin x}{\cos x} dx}$

$\lambda = e^{2\ln(\cos x)}$

$\lambda = \cos^2 x$

$$\underbrace{z' \cos^2 x - 2z \cdot \cos^2 x \cdot \tan x}_{\frac{d}{dx}(z \cdot \cos^2 x)} = -2\sec^3 x \cdot \cos^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(z \cdot \cos^2 x) = -\frac{2}{\cos x}$$

$$\int d(z\cos^2 x) = \int -\frac{2}{\cos x} dx$$

$$z\cos^2 x = -2 \cdot \int \sec x\, dx$$

$$z\cos^2 x = -2\ln(\sec x + \tan x) + c$$

$$z = \frac{-2\ln(\sec x + \tan x) + c}{\cos^2 x}$$

$\downarrow$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{-2\ln(\sec x + \tan x) + c}{\cos^2 x}$$

ÖR/ $y' - \frac{y}{3x} = y^4 \ln x$ dif denk çözünüz.

$n=4 \qquad z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^3} \qquad z' = -3y^{-4} \cdot y'$

$z = y^{-3} \qquad z' = \frac{-3y'}{y^4}$

$$\frac{y'}{y^4} - \frac{y}{3xy^4} = \ln x$$

$$\frac{-z'}{3} - \frac{1}{3x} \cdot z = \ln x$$

$$z' + \frac{z}{x} = -3 \ln x \quad \text{Lineer dif denk}$$

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} \qquad \underline{\lambda = x}$$

$$\underbrace{xz' + z}_{\frac{d}{dx}(zx)} = -3x \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(zx) = -3x \ln x$$

$$\int d(zx) = -3\int x \ln x \, dx$$

$$zx = -3\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right] + c$$

$$z = -\frac{3}{2} x \ln x + \frac{3}{4} x + \frac{c}{x}$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x dx$

$v = \frac{x^2}{2}$

$$\frac{x^2}{2}\ln x - \int \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx}_{\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{1}{y^3} = \frac{-3}{2} x \ln x + \frac{3}{4} x + \frac{c}{x}$$

Genel Çözüm.

Riccati Dif Denklemi:

Bu denklem $y' + P(x)y^2 + \theta(x)y + R(x) = 0$ olarak verilir ve $P(x)$ sıfırdan farklı değerler alır. Bu denklemin eğer y_1 gibi bir özel çözümü verilmişse, bu durumda genel çözümü de bulunabilir. Aşağıdaki dönüşümler bu amaçla kullanılır. $y = y_1 + u$, $y' = y_1' + u'$ ile dif denk bernoulli dif denklemine dönüşür.

$y = y_1 + \dfrac{1}{u}$ $\quad y' = y_1' - \dfrac{u'}{u^2}$ ile lineer dif denkleme dönüşür.

y ve y' denklemde yerine yazılır.

$$y' + P(x)y^2 + \theta(x)y + R(x) = 0$$

$$(*) \quad y_1' - \frac{u'}{u^2} + P(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + \theta(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R(x) = 0$$

y_1 özel çözümü diferansiyel denklemi sağlamalıdır.

$(*)$ denklemi düzenlesirse

$$u' + [P(x)y_1 + \theta(x)]u + R(x) = 0$$

lineer dif denklemine ulaşılır.

Lineer dif denklem çözülüp $y = y_1 + \dfrac{1}{u}$ da yerine yazılırsa dif denklemin genel çözümü bulunur.

ÖR/ $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \frac{2}{x}$ olduğuna göre bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{2}{x} + \frac{1}{u} \qquad y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

Denklemde yerine yazılırsa

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\cancel{-\frac{2}{x^2}} - \frac{u'}{u^2} + \left(\cancel{\frac{4}{x^2}} + \frac{4}{xu} + \frac{1}{u^2}\right) + \cancel{\frac{2}{x^2}} + \frac{1}{xu} - \cancel{\frac{4}{x^2}} = 0$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{5}{xu} + \frac{1}{u^2} = 0$$

$$u' - \frac{5}{x}u = 1 \quad \text{Lineer dif denk}$$

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{5}{x}dx} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = \frac{1}{x^5}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^5}u' - \frac{5}{x}\cdot\frac{1}{x^5}u}_{\frac{d}{dx}\left(u\cdot\frac{1}{x^5}\right)} = \frac{1}{x^5}$$

$$\frac{d}{dx}\left(u\cdot\frac{1}{x^5}\right) = \frac{1}{x^5} \Rightarrow \int d\left(u\cdot\frac{1}{x^5}\right) = \int x^{-5}dx$$

$$u\cdot\frac{1}{x^5} = \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

$$u = \frac{-x}{4} + cx^5$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{2}{x} + \frac{1}{-x/4 + cx^5} \quad \text{Genel Ç.}$$

Clairaut Dif Denklemi

$y = xy' + \varphi(y')$ şeklindeki diferansiyel denklemlere clairaut dif denklemi denir.

$y' = p$

$y = xp + \varphi(p)$

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}\varphi'(p)$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}\varphi'(p) \Rightarrow 0 = \frac{dp}{dx}\left(x + \varphi'(p)\right)$$

1) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ $\qquad y = xp + \varphi(p)$

$y = xc + \varphi(c)$ Genel Çözüm

2) $x + \varphi'(p) = 0 \Rightarrow$ $\quad x = -\varphi'(p)$

$y = xp + \varphi(p)$

$y = -\varphi'(p)\,p + \varphi(p)$

Tekil Çözümün parametrik denklemleri

$$\left.\begin{aligned} x &= -\varphi'(p) \\ y &= -\varphi'(p)\,p + \varphi(p) \end{aligned}\right\}$$ den p parametresi yokedilirse tekil çözümün kartezyen denklemi elde edilir.

ÖR/ $y = xy' + y'^2$ dif denklemini çözünüz.

$y' = p$

$y = xp + p^2$ $\qquad \frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$0 = \frac{dp}{dx}(x+2p)$$

1) $\frac{dp}{dx} = 0 \qquad p = c \qquad y = \underline{xc + c^2}$ genel çözüm.

2) $x + 2p = 0 \qquad x = -2p$

$$y = xp + p^2 = (-2p)p + p^2$$

$\left.\begin{array}{l} x = -2p \\ y = -p^2 \end{array}\right\rangle$ Tekil çözümün parametrik denklemleri

$$-\frac{x}{2} = p \qquad y = -\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}$$

$\boxed{y = \frac{-x^2}{4}}$ Tekil çözümün kartezyen denklemi

ÖR/ $y = xy' + y' - y'^2$ dif denk çözünüz.

$y' = p \Rightarrow y = xp + p - p^2 \qquad \underset{\sim}{y' = \frac{dy}{dx}} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$

$$\cancel{p} = \cancel{p} + \frac{dp}{dx}(x + 1 - 2p)$$

1) $\frac{dp}{dx} = 0 \quad p = c \quad \boxed{\underline{y = xc + c - c^2}}$ Genel Çözüm

2) $x + 1 - 2p = 0 \qquad x = 2p - 1$

$\left.\begin{array}{l} x = 2p - 1 \\ y = p^2 \end{array}\right)$ Tekil çözümün parametrik denk

$$y = xp + p - p^2$$
$$y = (2p-1)p + p - p^2$$
$$y = 2p^2 - p + p - p^2 = p^2$$

$$x = 2p - 1 \qquad \frac{x+1}{2} = p$$
$$y = p^2$$

$y = p^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \qquad y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ Tekil çözümün kartezyen denk

Lagrange Dif Denklemi

$y = x\,f(y') + \varphi(y')$ şeklindeki dif denklemlere Lagrange dif denklemi denir.

$y' = p$

$y = x f(p) + \varphi(p)$

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} = f(p) + x\frac{dp}{dx} f'(p) + \frac{dp}{dx}\varphi'(p)$$

$$p = f(p) + \frac{dp}{dx}\left[x f'(p) + \varphi'(p)\right]$$

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}\left[x f'(p) + \varphi'(p)\right]$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x f'(p) + \varphi'(p)}{p - f(p)}$$

$$\frac{dx}{dp} = \left(\frac{f'(p)}{p - f(p)}\right) + \left(\frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}\right)$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)} = \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$$ Lineer dif denklemi

çözülürse $x = f(p, c)$ bulunur. y de x yerine yazılırsa genel çözümün parametrik denklemleri bulunur.

ÖR/ $y=-xy'+y'^3$ dif denklemini çözünüz.

$$y'=p$$

$$y=-xp+p^3$$

$$y'=-p-x\frac{dp}{dx}+3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$p=-p+\frac{dp}{dx}(-x+3p^2)$$

$$2p=\frac{dp}{dx}(-x+3p^2)$$

$$2p\frac{dx}{dp}=-x+3p^2$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{-x}{2p}+\frac{3p^2}{2p}$$

$$\frac{dx}{dp}+\frac{x}{2p}=\frac{3}{2}p$$

$x'+r(p)x=s(p)$
Lineer dif denk
x fonk
p değişken

$$\lambda=e^{\int r(p)dp}$$

$$\lambda=e^{\int\frac{1}{2p}dp}=e^{\frac{1}{2}\ln p}=e^{\ln_e p^{1/2}}=p^{1/2}$$

$$p^{1/2}\cdot\frac{dx}{dp}+p^{1/2}\cdot\frac{x}{2p}=\frac{3}{2}p\cdot p^{1/2}$$

$$\underbrace{\sqrt{p}\,\frac{dx}{dp}+\frac{x}{2\sqrt{p}}}=\frac{3}{2}p^{3/2}$$

$$\frac{d}{dp}(x\sqrt{p})=\frac{3}{2}p^{3/2}\Rightarrow\int d(x\sqrt{p})=\int\frac{3}{2}p^{3/2}dp$$

$$x\sqrt{p}=\frac{3}{2}\frac{p^{5/2}}{5/2}+k$$

$$x=\frac{3}{5}p^2+\frac{k}{\sqrt{p}}$$

$$x=\frac{3}{5}p^2+\frac{k}{\sqrt{p}}$$

$y=-xp+p^3=-\left(\frac{3}{5}p^2+\frac{k}{\sqrt{p}}\right)p+p^3$ olur.

ÖR/ $x(y')^2+(x-y)y'+1-y=0$ denklemini çözünüz.

$$x(y')^2+xy'-yy'+1-y=0$$

$$y(-y'-1)+xy'(y'+1)+1=0$$

$$y=xy'+\frac{1}{y'+1}$$ Clairaut Dif denk

$y'=p$ $$y=xp+\frac{1}{p+1}$$

$$y'=p+xp'-\frac{p'}{(p+1)^2}$$

$$\cancel{p}=\cancel{p}+xp'-\frac{p'}{(p+1)^2}$$

$$p'\left(x-\frac{1}{(p+1)^2}\right)=0$$

1) $p'=0 \Rightarrow p=c$ $\quad y=xc+\frac{1}{c+1}$ genel çözüm

2) $x-\frac{1}{(p+1)^2}=0$ $\quad x=\frac{1}{(p+1)^2}$

$$y=xp+\frac{1}{p+1}=\frac{1}{(p+1)^2}p+\frac{1}{p+1}$$

$$y=\frac{1}{(p+1)^2}\cdot p+\frac{1}{p+1}$$

Tekil çözümün parametrik denk

$$x+y=\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{p}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}$$

$$x+y=\frac{\cancel{1+p}}{\cancel{(p+1)^2}_{p+1}}+\frac{1}{p+1}=\frac{2}{p+1}$$

$$(x+y)^2=\frac{4}{(p+1)^2}\Rightarrow \boxed{(x+y)^2=4x}$$ Tekil çözümün kartezyen denk

ÖR / $y = x(y')^2 + (y')^3$ dif denklemini çözünüz.

$y' = p$

$$y = xp^2 + p^3$$

$$y' = p^2 + 2xpp' + 3p^2p'$$

$$p = p^2 + 2xpp' + 3p^2p'$$

$$p - p^2 = (2xp + 3p^2)p'$$

$$\frac{p - p^2}{2xp + 3p^2} = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2xp + 3p^2}{p(1-p)}$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{3p}{1-p}$$ Lineer Dif Denk

$$\lambda = e^{\int \frac{2}{p-1}dp} = e^{2\ln(p-1)} = (p-1)^2$$

$$(p-1)^2\frac{dx}{dp} - 2(p-1)x = -3p(p-1)$$

$$\frac{d}{dp}\left[(p-1)^2 x\right] = -3p^2 + 3p$$

$$d\int (p-1)^2 x = \int(-3p^2 + 3p)\,dp$$

$$(p-1)^2 x = -p^3 + \frac{3}{2}p^2 + c$$

$$x = \frac{-p^3 + \frac{3}{2}p^2 + c}{(p-1)^2}$$

$$y = xp^2 + p^3 \Rightarrow y = \frac{(-p^3 + 3/2\,p^2 + c)}{(p-1)^2}\cdot p^2 + p^3$$

genel çözümün parametrik denklemleri

ÖR/ $(1-x^3)y' + 2xy^2 - x^2y - 1 = 0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = x$ olduğuna göre dif denklemin genel çözümünü bulunuz.

Riccati Dif denklemi

$y = y_1 + \frac{1}{u} \qquad y = x + \frac{1}{u} \qquad y' = 1 - u'/u^2$

$$(1-x^3)\left(1 - u'/u^2\right) + 2x\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - x^2\left(x + \frac{1}{u}\right) - 1 = 0$$

$$\cancel{1} - \frac{u'}{u^2} - x^3 + x^3\frac{u'}{u^2} + 2x\left(x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2}\right) - x^3 - \frac{x^2}{u} - \cancel{1} = 0$$

$$-\frac{u'}{u^2} - 2x^3 + x^3\frac{u'}{u^2} - \frac{x^2}{u} + 2x^3 + \frac{4x^2}{u} + \frac{2x}{u^2} = 0$$

$$-u' + x^3u' + 3x^2u + 2x = 0 \Rightarrow (x^3-1)u' + 3x^2u = -2x$$

$$u' + \frac{3x^2}{x^3-1}\cdot u = -\frac{2x}{x^3-1} \qquad \text{Lineer Dif denk}$$

$$\lambda = e^{\int 3x^2/x^3-1\,dx} = e^{\ln(x^3-1)} = x^3-1$$

$$u'(x^3-1) + 3x^2\cdot u = -2x$$

$$\frac{d}{dx}\left[u(x^3-1)\right] = -2x \Rightarrow \int d(u(x^3-1)) = \int -2x\,dx$$

$$u(x^3-1) = -2\frac{x^2}{2} + c$$

$$u = \frac{-x^2+c}{x^3-1}$$

$$y = x + \frac{1}{u} \quad \text{idi}$$

$$y = x + \frac{1}{\frac{-x^2+c}{x^3-1}} \quad \Bigg\} \text{ genel Çözüm.}$$

ÖR/ $y' = 2(1+x)(1+y^2)$ dif denklemının $y(0)=0$ başlangıç koşulu altındaki çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = 2(1+x)(1+y^2)$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2(1+x)\,dx$$

$$\arctan y = 2x + x^2 + C$$

$y(0)=0$ $x=0$ $y=0$

$$\arctan 0 = 2.0 + 0^2 + C \qquad C=0$$

$$\arctan y = 2x + x^2$$ özel Çözüm

ÖR/ $y = Ax + \frac{B}{x}$ eğri ailesinin dif denklemini bulunuz.

$$xy = Ax^2 + B$$

A, B sabit

y', y'' türevleri alınacak

$$y + xy' = 2Ax$$

$$y' + y' + xy'' = 2A$$

$$2y' + xy'' = 2A$$

$y + xy' = 2Ax$

$A = \frac{y + xy'}{2x}$

$$2y' + xy'' = 2\left[\frac{y+xy'}{2x}\right]$$

$$2y' + xy'' = y' + \frac{y}{x}$$

$$y' + xy'' = \frac{y}{x} \Rightarrow xy' + x^2y'' - y = 0$$

Dif Denk bulunur.

ÖR/ $y' = \tan^2(x+y)$ dif denklemini çözünüz.

$$y' = f(ax+by+c) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$ax+by+c = t \Rightarrow a + by' = t'$$
$$by' = t' - a$$
$$y' = \frac{t'-a}{b}$$

$$\frac{t'-a}{b} = f(t) \Rightarrow t' - a = b\,f(t)$$
$$t' = a + b\,f(t)$$
$$\frac{dt}{dx} = a + b\,f(t)$$
$$\int dx = \int \frac{dt}{a+b\,f(t)}$$
$$x = F(t) + c$$
$$x = F(ax+by+c) + c$$

Şimdi soruyu çözelim.

$$y' = \tan^2(x+y)$$
$$x+y = t \Rightarrow 1 + y' = t' \qquad y' = t' - 1$$

$$t' - 1 = \tan^2 t$$
$$t' = 1 + \tan^2 t$$
$$\frac{dt}{dx} = 1 + \tan^2 t \Rightarrow \int dx = \int \frac{dt}{1+\tan^2 t} = \int \frac{dt}{\sec^2 t}$$
$$\int dx = \int \cos^2 t \, dt$$
$$x = \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$$
$$x = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C$$
$$x = \frac{1}{2}\cdot(x+y) + \frac{1}{4} \sin 2(x+y) + C$$ Genel çözüm.

ÖR/ $y' = 2(1+x)(1+y^2)$ dif denklemının $y(0)=0$ başlangıç koşulu altındaki çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = 2(1+x)(1+y^2)$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2(1+x)dx$$

$$\arctan y = 2x + x^2 + c$$

$y(0)=0$ $x=0$ $y=0$

$$\underbrace{\text{Arctan } 0}_{0} = 2.0 + 0^2 + c \qquad c=0$$

$\text{Arctan } y = 2x + x^2$ özel çözüm

ÖR/ $y = Ax + \frac{B}{x}$ eğri ailesinin dif denklemi bulunuz.

A, B sabit y', y'' alınır.

$$xy = Ax^2 + B$$

$$y + xy' = 2Ax$$

$$y' + y' + xy'' = 2A$$

$$2y' + xy'' = 2A$$

$y + xy' = 2Ax$

$A = \frac{y+xy'}{2x}$

$$2y' + xy'' = 2\left[\frac{y+xy'}{2x}\right]$$

$$2y' + xy'' = \frac{y}{x} + y'$$

$$y' + xy'' = \frac{y}{x} \Rightarrow xy' + x^2y'' - y = 0$$

Dif denk bulunur.

ÖR/ $y' + 2\dfrac{y}{x} = 12\sqrt{y}\cdot x^4$, $y(0)=4$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$n = 1/2$

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}-1}} = \frac{1}{y^{-1/2}}$$

$$z = y^{1/2} \Rightarrow z' = \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y'$$

$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2y}{x\cdot\sqrt{y}} = \frac{12\sqrt{y}\cdot x^4}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2}{x} y\cdot y^{-1/2} = 12x^4$$

$$2z' + \frac{2}{x} y^{1/2} = 12x^4$$

$$2z' + \frac{2}{x} z = 12x^4$$

$$z' + \frac{z}{x} = 6x^4 \quad \text{Lineer oldu.}$$

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$z'x + \frac{z}{\cancel{x}}\cancel{x} = 6x^5$$

$$\underbrace{z'x + z}_{} = 6x^5$$

$$\frac{d}{dx}(zx) = 6x^5 \Rightarrow \int d(zx) = \int 6x^5 dx$$

$$zx = \frac{\cancel{6}x^6}{\cancel{6}} + c$$

$x=0$ $\quad \sqrt{y}\cdot x = x^6 + c$ Genel Ç.

$y=4$ $\quad 4\cdot 0 = 0 + c$

$c = 0$

$\sqrt{y}\cdot x = x^6$ Özel Çözüm

$\sqrt{y} = x^5 \Rightarrow y = x^{10}$

ÖR/ $y' - y = y^2 e^{-x} \sin x$ dif denk çözünüz.

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^{2-1}} = \frac{1}{y}$$ Bernoulli dif denk

$$z' = -y'/y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{y}{y^2} = e^{-x} \sin x$$

$$-z' - z = e^{-x} \sin x$$

$$z' + z = -e^{-x} \sin x$$ lineer dif denk

$$\lambda = e^{\int p(x) dx} = e^{\int 1 \cdot dx} = e^{x}$$

$$z' \cdot e^{x} + z \cdot e^{x} = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(z e^{x}) = -\sin x$$

$$\int d(z e^{x}) = \int -\sin x \, dx$$

$$z e^{x} = \cos x + c$$

$$z = \frac{\cos x + c}{e^{x}} = \frac{1}{y} = \frac{\cos x + c}{e^{x}}$$

$$y = \frac{e^{x}}{\cos x + c}$$ genel çözüm

ÖR/ $(1+x^3)y' - x^2y + y^2 + 2x = 0$ diferansiyel denklemine ait bir özel çözüm $y_1 = -x^2$ olduğuna göre dif denk çözünüz

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = -x^2 + \frac{1}{u}$$

$$y' = -2x - \frac{u'}{u^2}$$

$$(1+x^3)\left(-2x - \frac{u'}{u^2}\right) - x^2\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right) + \left(-x^2 + \frac{1}{u}\right)^2 + 2x = 0$$

$$-2x - \frac{u'}{u^2} - 2x^4 - \frac{u'}{u^2}x^3 + x^4 - \frac{x^2}{u} + x^4 - \frac{2x^2}{u} + \frac{1}{u^2} + 2x = 0$$

$$\frac{-u'}{u^2}(1+x^3) - \frac{3x^2}{u} + \frac{1}{u^2} = 0$$

$-u^2$ ile heriki tarafı çarpalım.

$$u'(1+x^3) + 3x^2u - 1 = 0$$

$$u' + \frac{3x^2}{1+x^3}u = \frac{1}{1+x^3} \quad \text{Lineer dif denk}$$

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3x^2}{1+x^3}dx} = e^{\ln(1+x^3)}$$

$$\lambda = 1+x^3$$

$$\underbrace{u'(1+x^3) + (3x^2)u}_{\frac{d}{dx}(u\cdot(1+x^3))} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(u\cdot(1+x^3)\right) = 1$$

$$\int d(u\cdot(1+x^3)) = \int dx$$

$$u(1+x^3) = x + c$$

$$u = \frac{x+c}{1+x^3}$$

$$y = -x^2 + \frac{1}{u}, \quad y = -x^2 + \frac{1}{\frac{x+c}{1+x^3}}$$

Genel Ç.

ÖR/ $y = xy' + y' - (y')^2$ dif denk çözünüz

$y' = p$

$y = xp + p - p^2$

$y' = p + x\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{dp}{dx} - 2p\cdot\dfrac{dp}{dx}$

$\cancel{p} = \cancel{p} + \dfrac{dp}{dx}(x + 1 - 2p)$

$\dfrac{dp}{dx}(x + 1 - 2p) = 0$

1) $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$

$y = cx + c - c^2$ Genel Çözüm

2) $x + 1 - 2p = 0$

$x = 2p - 1$
$y = p(2p - 1) + p - p^2$ Tekil Çözümün parametrik denklemleri

$p = \dfrac{x+1}{2}$

$y = 2p^2 \cancel{-p} \cancel{+p} - p^2$

$y = p^2 = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$

$y = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$ Tekil Çözüm

ÖR/ $y' - \frac{1}{x} y = x^2$

$y' + p(x) y = q(x)$

$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\lambda = \frac{1}{x}$

$\underbrace{\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y}_{} = x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} y\right) = x$

$\int d\left(\frac{1}{x} y\right) = \int x\,dx$

$\frac{1}{x} y = \frac{x^2}{2} + c$

$y = \frac{x^3}{2} + cx$ Genel G.

ÖR/ $x\,dy + y\,dx = e^x dx$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$x\,dy + y\,dx - e^x dx = 0$

$\underbrace{(y - e^x)}_{M} dx + \underbrace{x}_{N} dy = 0$ Bu dif denk tam dif.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$ tam dif

$(y - e^x) dx + x\,dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x$ $\int du = \int x\,dy$

$u(x,y) = xy + R(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{dR}{dx}$

$y - e^x = y + dR/dx$

$dR/dx = -e^x$

$\int dR = \int -e^x dx$

$R(x) = -e^x + k$

$u(x,y) = xy - e^x + k = c$

$xy - e^x = c$ $c - k = c$

$(y-e^x)\,dx + x\,dy = 0$

$x\dfrac{dy}{dx} + y - e^x = 0$

$xy' + y - e^x = 0$

$y' + \dfrac{y}{x} - \dfrac{e^x}{x} = 0$

$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^x}{x}$ bu denklem aynı zamanda Lineer dif denklem

$P(x) = \dfrac{1}{x}$

$\lambda = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$xy' + x.\dfrac{y}{x} = \dfrac{xe^x}{x}$

$\underbrace{xy' + y} = e^x$

$\dfrac{d}{dx}(y.x) = e^x$

$\int d(yx) = \int e^x\,dx$

$yx = e^x + k$

$y = \dfrac{e^x + k}{x}$

$xy = e^x + k$

$xy - e^x = k$ Genel Çözüm

ÖR/ $\underbrace{2y}_{M}dx + \underbrace{(1-\ln y - 2x)}_{N}dy=0$ dif denklemini çözünüz

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -2 \quad \text{tam dif değil}$$

$$\ln\lambda = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy = \int \frac{-2-2}{2y} dy = -2\ln y$$

$$\ln\lambda = -2\ln y$$

$$\lambda = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot 2y\,dx + \frac{1}{y^2}(1-\ln y - 2x)\,dy = 0$$

$$\underbrace{\frac{2}{y}}_{M_1}dx + \underbrace{\left(\frac{1-\ln y - 2x}{y^2}\right)}_{N_1}dy = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{2}{y^2} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \text{tam dif oldu.}$$

$$\frac{2}{y}dx + \left(\frac{1-\ln y - 2x}{y^2}\right)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{y} \Rightarrow \int du = \int \frac{2}{y}dx$$

$$u(x,y) = \frac{2}{y}x + R(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2}{y^2}\cancel{x} + \frac{dR}{dy} = \frac{1}{y^2} - \frac{\ln y}{y^2} - \cancel{\frac{2x}{y^2}}$$

$$\frac{dR}{dy} = \frac{1}{y^2} - \frac{\ln y}{y^2}$$

$$\int dR = \int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{\ln y}{y^2}\right)dy$$

$$R(y) = \cancel{-\frac{1}{y}} - \left[-\frac{\ln y}{y} \cancel{-\frac{1}{y}}\right] + k$$

$$R(y) = \ln y/y + k$$

$$u(x,y) = 2x/y + \ln y/y = C$$

Kısmi integrasyon

$\int \frac{\ln y}{y^2}dy$? $uv - \int v\cdot du$

$u = \ln y \qquad du = \frac{1}{y}dy$

$dv = \frac{1}{y^2}dy$

$v = -\frac{1}{y}$

$-\frac{1}{y}\ln y - \int -\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}dy$

$-\frac{\ln y}{y} + \underbrace{\int \frac{1}{y^2}dy}_{-1/y}$

ÖR/ $(x-3y)\,dx - x\,dy = 0$ diferansiyel denklemini $\lambda = x^n$ olacak şekilde bir integrasyon çarpanı bularak çözünüz.

$$x^n(x-3y)\,dx - x^n \cdot x\,dy = 0$$

$$\underbrace{(x^{n+1} - 3x^n y)}_{M_1}\,dx - \underbrace{x^{n+1}}_{N_1}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$-3x^n = -(n+1)x^n$$

$$3 = n+1 \Rightarrow n = 2 \qquad \lambda = x^2$$

$$(x^3 - 3xy^2)\,dx - x^3\,dy = 0 \qquad \text{Tam dif}$$

$$(x^3 - 3xy^2)\,dx - x^3\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^3 \qquad \int du = \int -x^3\,dy$$

$$u(x,y) = -x^3 y + R(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\cancel{3x^2 y} + \frac{dR}{dx} = x^3 - \cancel{3xy^2}$$

$$\frac{dR}{dx} = x^3$$

$$\int dR = \int x^3\,dx$$

$$R(x) = \frac{x^4}{4} + k$$

$$u(x,y) = -x^3 y + \frac{x^4}{4} + k = c$$

$$c - k = c$$

$$-x^3 y + \frac{x^4}{4} = c$$

Genel Çözüm.

ÖR/ $\left(x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)dx + x\,dy = 0$, $y(1) = \pi/4$

şartını sağlayan özel çözümü bulunuz.

Her iki tarafı x'e bölelim.

$$\left(\cos^2\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$$

$y/x = u$ $\quad \underbrace{y = xu}$ $\quad y' = xu' + u$, $\underbrace{dy = u\,dx + x\,du}$

$$(\cos^2 u - u)\,dx + u\,dx + x\,du = 0$$

$$\cos^2 u\,dx - \cancel{u\,dx} + \cancel{u\,dx} + x\,du = 0$$

$$\cos^2 u\,dx = -x\,du$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$\ln x = -\tan u + c$$

$$\ln x = -\tan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad \text{Genel Çözüm}$$

$x = 1$ $\quad y = \pi/4$ ise

$$\ln 1 = -\tan\left(\pi/4\right) + c$$

$$0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\ln x = -\tan\left(\frac{y}{x}\right) + 1 \quad \text{Özel Çözüm}$$

ÖR/ $\underbrace{(\tan y - 3x^3)}_{M} dx + \underbrace{x \sec^2 y}_{N} dy = 0$ dif denk çözünüz

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sec^2 y = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{tam dif.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan y - 3x^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \sec^2 y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \sec^2 y$$

$$\int du = \int x \sec^2 y \, dy$$

$$u(x,y) = x \tan y + R(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{\tan y} + \frac{dR}{dx} = \cancel{\tan y} - 3x^3$$

$$\frac{dR}{dx} = -3x^3 \qquad \int dR = \int -3x^3 dx$$

$$R(x) = -\frac{3x^4}{4} + k$$

$$u(x,y) = x \tan y - \frac{3}{4} x^4 + k = c$$

$$c - k = c$$

$$x \tan y - \frac{3}{4} x^4 = c \qquad \text{Genel Çözüm}$$

ÖR/ $xy' = 3xy^{4/3} - 6y$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' + \frac{6}{x} y = 3y^{4/3} \quad \text{Bernoulli dif denk}$$

$$n = 4/3 \qquad z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^{4/3-1}} = \frac{1}{y^{1/3}} = y^{-1/3}$$

$$z' = -\frac{1}{3} y^{-4/3} \cdot y'$$

$$\frac{y'}{y^{4/3}} + \frac{6}{x} \frac{y}{y^{4/3}} = 3$$

$$-3z' + \frac{6}{x} z = 3$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -1 \quad \text{Lineer dif denk}$$

$$\lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^2} z' - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2} z}_{} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[z \cdot \frac{1}{x^2}\right] = -\frac{1}{x^2}$$

$$\int d\left(z \cdot \frac{1}{x^2}\right) = \int -\frac{1}{x^2} dx = -\int x^{-2} dx$$

$$\frac{z}{x^2} = \frac{1}{x} + c$$

$$z = x + cx^2$$

$$z = y^{-1/3} \qquad y^{-1/3} = x + cx^2$$

$$y = \frac{1}{(x+cx^2)^3} \quad \text{genel çözüm.}$$

ÖR/ $(x - y\ln y + y\ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$

dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$(x - y(\ln y - \ln x))dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$$

$$\left(x - y \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\ln\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$ homojen dif denk

$$\left(1 - \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + \ln\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$y = ux \qquad dy = u\,dx + x\,du$

$$(1 - u\ln u)dx + \ln u\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1 - \cancel{u\ln u} + \cancel{u\ln u})dx + x\ln u\,du = 0$$

$$dx + x\ln u\,du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \ln u\,du = 0$$

$$\ln x + u(\ln u - 1) = c$$

$$\ln x + \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = c$$

ÖR/ Yüksek mertebeden sabit katsayılı bir lineer homojen dif denklemin karakteristik denkleminin kökleri $r_1 = i$, $r_2 = -i$, $r_3 = 2$, $r_4 = 2$, $r_5 = 3$ olsun. Buna göre bu dif denklemini ve $y(x)$ genel çözümünü yazınız.

$$(r^2+1)(r-2)^2 \cdot (r-3) = 0$$

$r^5 - 7r^4 + 17r^3 - 19r^2 + 16r - 12 = 0$ karakteristik denklem

$y^{(5)} - 7y^{(4)} + 17y''' - 19y'' + 16y' - 12y = 0$ Dif denk

$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x} + c_5e^{3x}$ genel çözüm

ÖR/ $y = x(1+y') + (y')^2$ dif denk çözünüz

$y' = p$

$y = x(1+p) + p^2$

$y' = (1+p) + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} = p$

$\frac{dp}{dx}(x+2p) + 1 = 0$

$\frac{dx}{dp} + x + 2p = 0$

$\frac{dx}{dp} + x = -2p$ lineer dif denk

$x' + r(p)x = s(p)$ x fonk, p değişken

$\lambda = e^{\int r(p)dp} = e^{\int 1.dp} = e^p$

$\lambda = e^p$

$\underbrace{\frac{dx}{dp}.e^p + xe^p}_{} = -2pe^p$

$\frac{d}{dp}(e^p.x) = -2pe^p$

$\int d(e^p.x) = \int -2pe^p dp$

$e^p x = -2\int pe^p dp$

$e^p x = -2\left[pe^p - e^p\right] + c$

$e^p x = -2pe^p + 2e^p + c$

$p = u$

$dp = du$

$e^p dp = dv$

$e^p = v$

$uv - \int v\,du$

$p.e^p - \int e^p.dp$

$pe^p - e^p + c$

Genel çözümün parametrik denklemleri

$x = -2p + 2 + ce^{-p}$

$y = (-2p + 2 + ce^{-p})(1+p) + p^2$