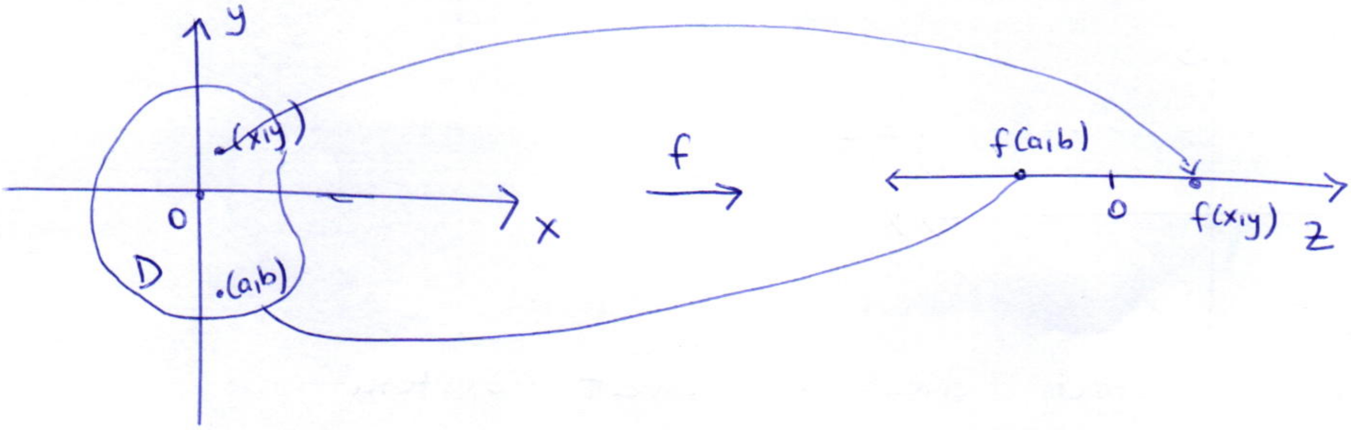
Çok değişkenli fonksiyonlar

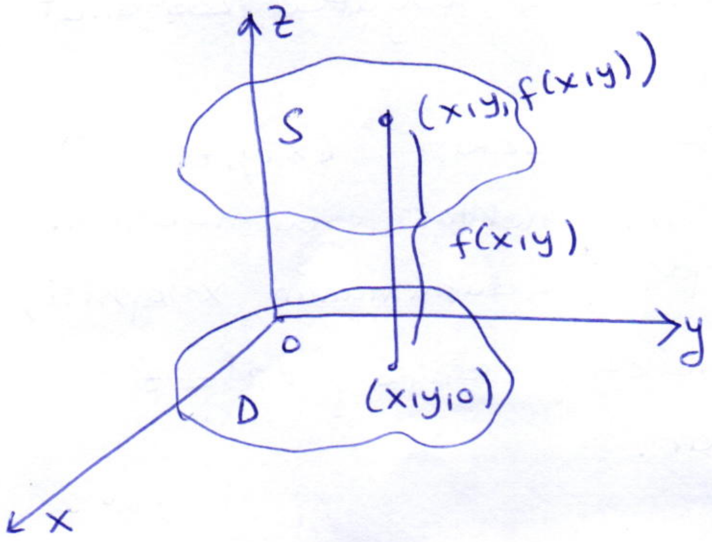
Tanım: Bir u değişkeninin değerleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine bağlı olarak belirtiliyorsa u değişkeni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerinin fonksiyonudur. denir. ve $u = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ veya $f(u, x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$ (kapalı gösterim) şeklinde gösterilir. Bu durumda u, n değişkenli bir fonksiyondur.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin iki alt kümesi A, B ve $x \in A$, $y \in B$ olsun. Her $(x,y) \in A \times B = D$ sayı çiftine bir z değerini karşılık getiren bir f kuralı var ise $z = f(x,y)$ yazılır. z, x ile y nin bir fonksiyonudur.



$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $z = f(x,y) \Rightarrow$ (Açık hali)

$f(x,y,z) = 0$ (Kapalı hali)



ÖR/ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=f(x,y)=x^3+3y^2+1$

fonksiyonları iki değişkenli fonksiyonlardır.

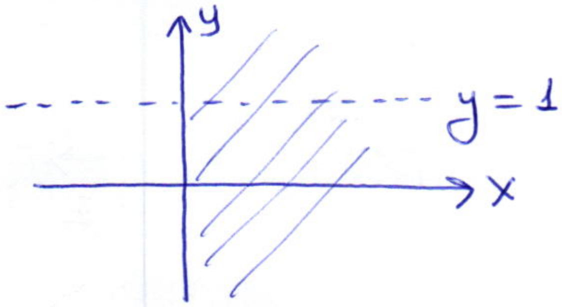
Bağımlı ve bağımsız değişkenler:

$z=f(x,y)$ fonksiyonunda x ve y bağımsız değişkenler, z ye bağımlı değişken denir.

Tanım aralığı;

Fonksiyonu tanımlayan (x,y) değerler kümesine $z=f(x,y)$ fonksiyonunun tanım kümesi denir.

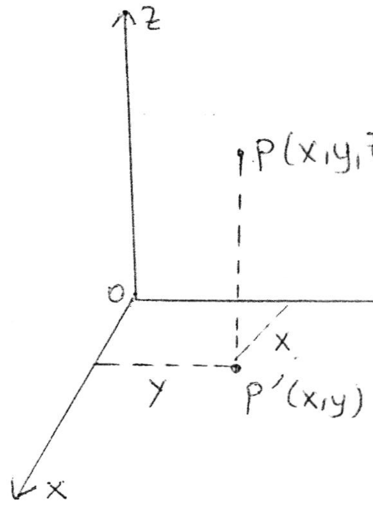
ÖR / $z=f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{y-1}$ fonksiyonu $x\geq 0$ ve $y\neq 1$ olmak üzere x ve y nin tüm değerleri için tanımlanmıştır.

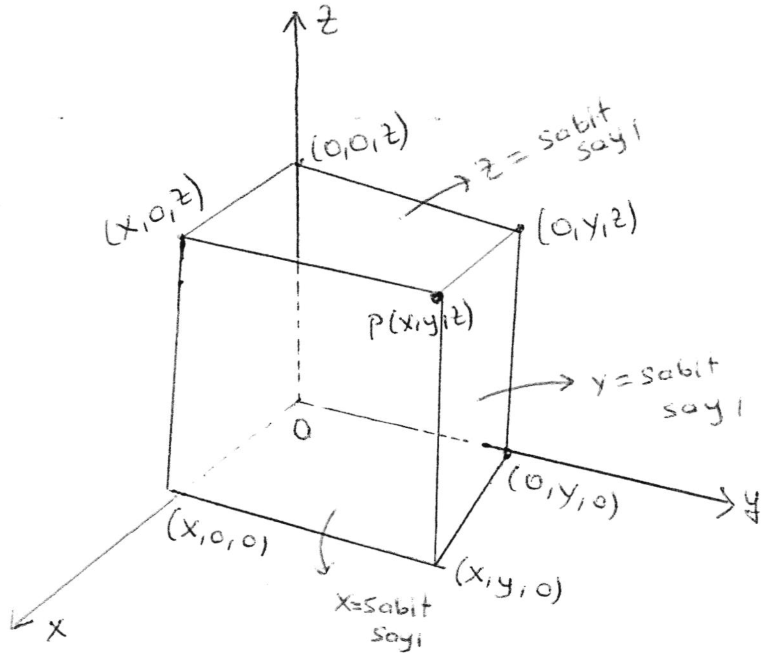


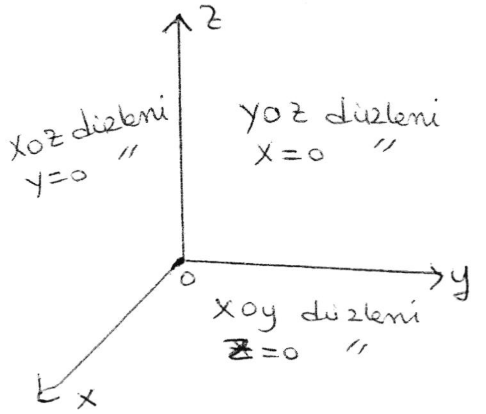
Üç boyutlu dik koordinat sistemi

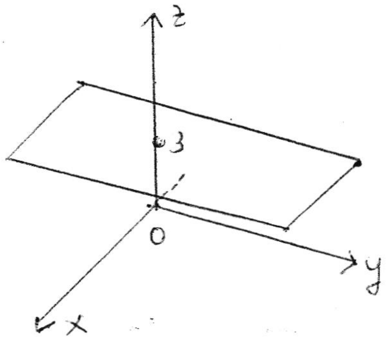
xy düzlemine O başlangıç noktasında dik olan bir z ekseni çizildiğinde üç boyutlu koordinat sistemi elde edilir.

Üç boyutlu uzayda bir P noktası (x,y,z) koordinatları ile gösterilir. P noktası bu noktanın xy düzlemi üzerindeki P' izdüşümünün x apsisi, y ordinatı ile belirlendikten sonra $PP'=z$ yüksekliği ile belirtilir.

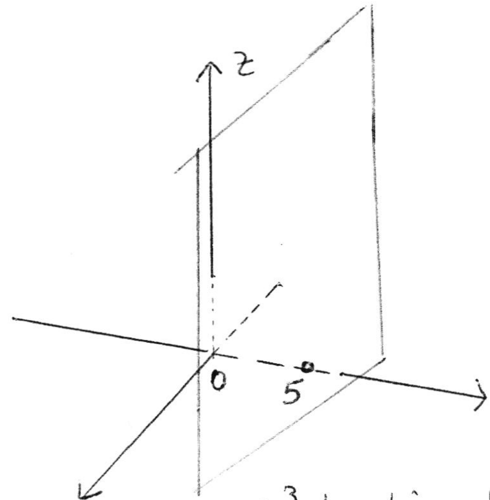








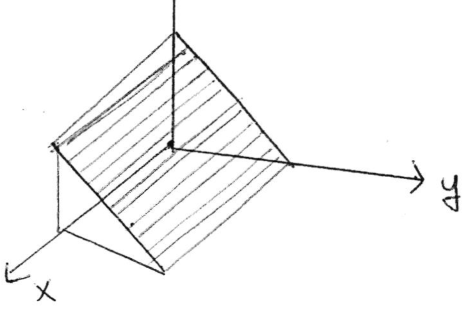
$z=3$, R^3 te bir düzlendir.



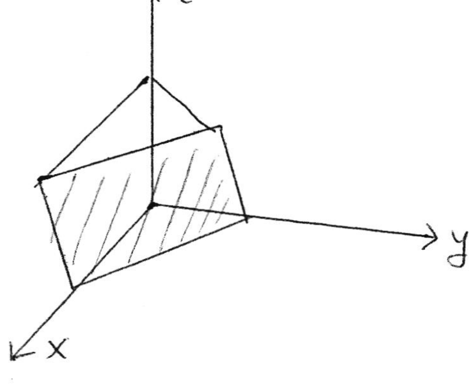
$y=5$ R^3 te bir düzlendir.

$ax+by+cz+d=0$ düzleni

$a=0 \Rightarrow by+cz+d=0$



$c=0$ ise $ax+by+d=0$



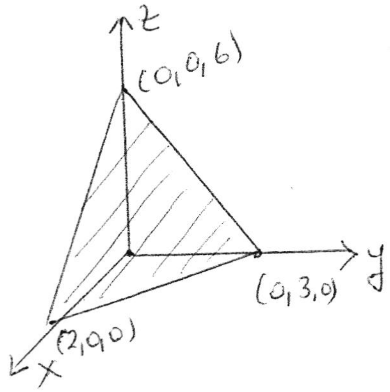
ÖR/ $f(x,y,z) = 6-3x-2y$ düzleminin grafiğini çiziniz.

$z = 6-3x-2y$

$x=y=0 \quad z=6 \quad (0,0,6)$

$x=z=0 \quad y=3 \quad (0,3,0)$

$y=z=0 \quad x=2 \quad (2,0,0)$



Seviye Eğrileri

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu noktaların kümesi f in seviye eğrisidir.

ÖR/ $f(x,y)=100-x^2-y^2$ fonksiyonunun

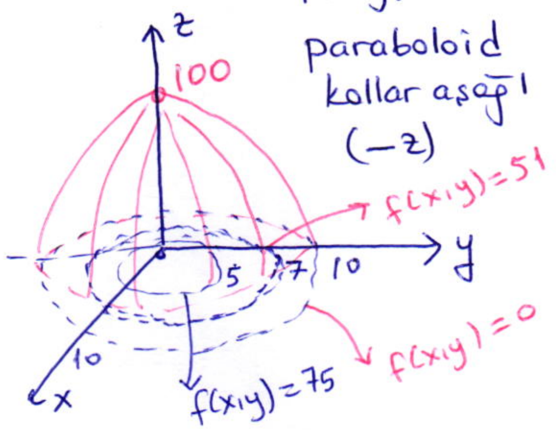
$f(x,y)=0$, $f(x,y)=75$, $f(x,y)=51$, $f(x,y)=100$

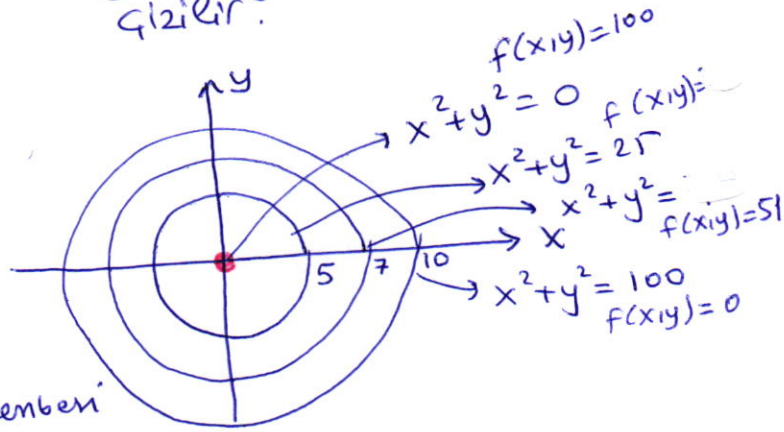
için seviye eğrilerini gösteriniz.

$f(x,y)=100-x^2-y^2 \Rightarrow z=100-x^2-y^2 \quad x^2+y^2=100-z$

paraboloid kollar aşağı $(-z)$

Seviye eğrileri düzlemde çizilir.





$f(x,y)=0 \Rightarrow x^2+y^2=100$ çemberi

$f(x,y)=75 \Rightarrow x^2+y^2=25$

$f(x,y)=51 \Rightarrow x^2+y^2=49$

$f(x,y)=100 \Rightarrow x^2+y^2=0 \qquad (x,y)=(0,0)$

Bir yüzeyin izi: Bir yüzeyi çizerken, genellikle onun değişik düzlemlerle arakesitini incelemek fayda sağlamaktadır. Bir yüzeyin düzlemdeki izi, yüzey ile düzlemin arakesiti olan eğridir.

ÖR/ $f(x,y)=7-x^2-3y^2$ yüzeyinin $y=1$ düzlemi ile izini bulunuz. Yüzey denkleminde y yerine 1 yazarız.

$z=4-x^2$ dir. Parabolik silindirdir.

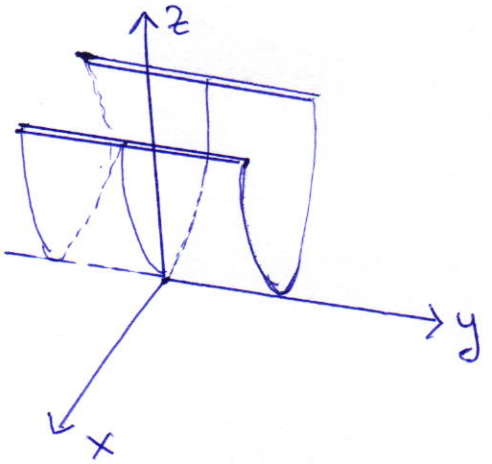
Silindirler

Verilen bir düzlem eğrisinden geçen ve verilen bir doğruya paralel olan doğruların oluşturduğu yüzeylere silindirik yüzeyler denir. Silindiri oluşturan bu doğrular da silindirin ana doğruları olarak adlandırılır.

ÖR/ $z = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

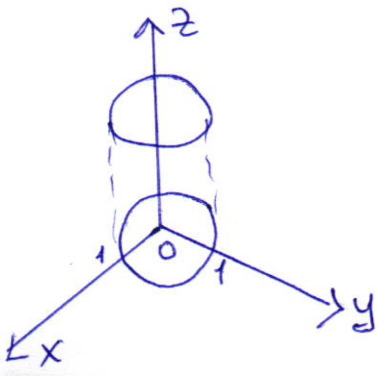
$z = x^2$, xz düzleminde bir paraboldür.

Uzayda $z = x^2$ yüzeyini çizmek için bu paraboli kesen ve y eksenine paralel olan tüm doğruları çizersek parabolik silindir grafiğini de çizmiş oluruz. Bu $z = x^2$ parabolünün y-ekseni boyunca sonsuz tane kopyasının kaydırılması ile oluşan yüzeydir.



ÖR/ $x^2 + y^2 = 1$ yüzeyinin grafiğini çizelim.

$x^2 + y^2 = 1$ denklemi xy düzleminde $(z = 0)$ yarıçapı 1 olan merkezil çemberdir. $z = k$ düzlemlerinin her birinde bu çemberin aynısı çizilerek şekildeki dairesel silindir çizilmiş olur.

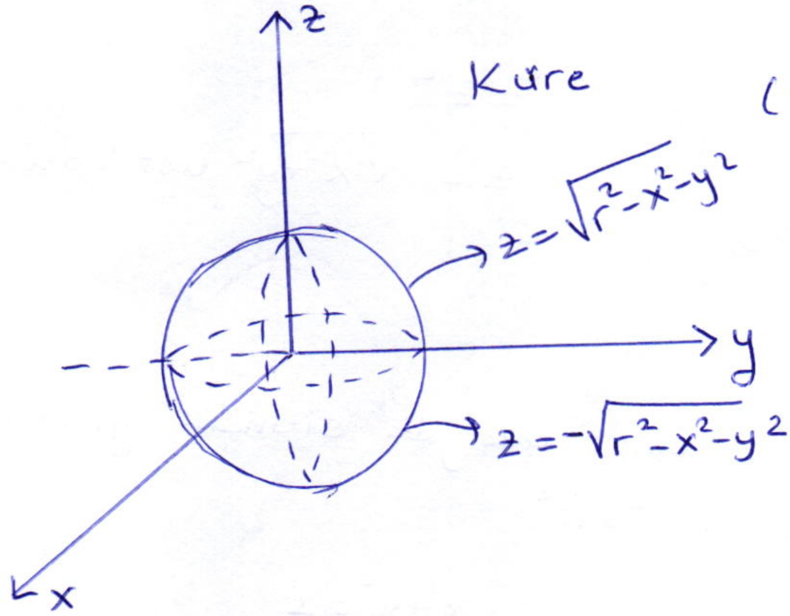


2 dereceden kuadratik yüzeyler

Bir yüzeyin grafiği ile ilgili fikir sahibi olabilmek için koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle kesitlerinin belirlediği eğrileri tespit etmek faydalı olur. Bu eğrilere $z=f(x,y)$ yüzeyinin izleri denir.

Bir yüzeyi çizerken genellikle onun değişik düzlemlerle arakesitini incelemek fayda sağlamaktadır. Bir yüzeyin düzlemdeki izi, yüzey ile düzlemin arakesiti olan eğridir.

Küre



$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

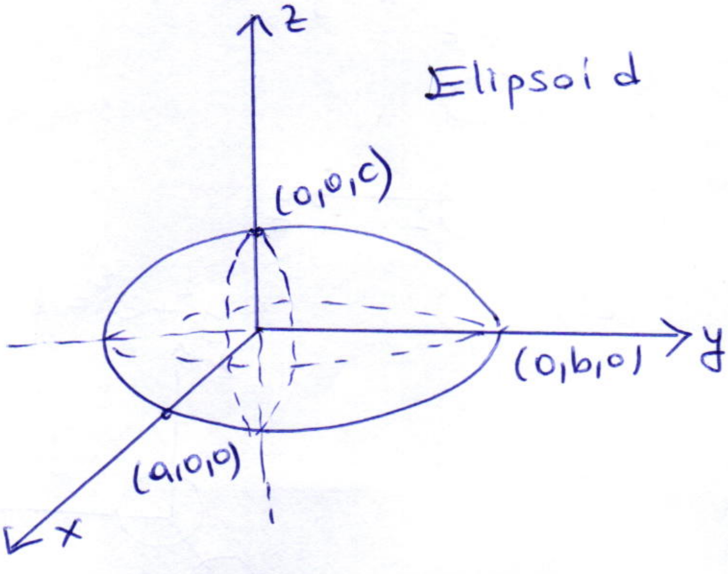
$M(a,b,c)$ r: yarıçap

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

üst yarıküre

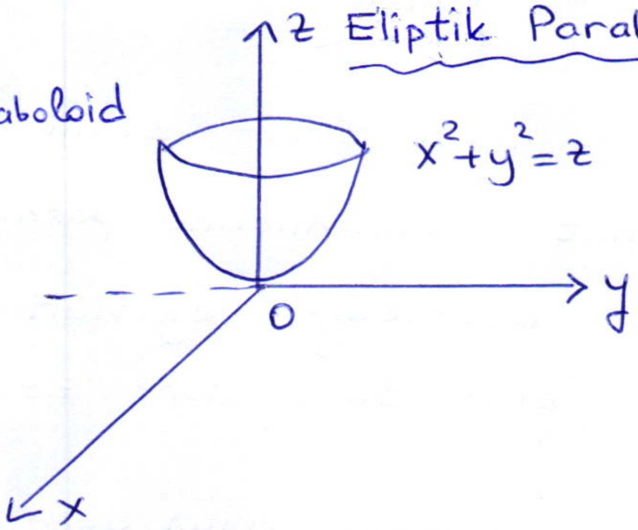
Elipsoid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Eliptik Paraboloid

Paraboloid



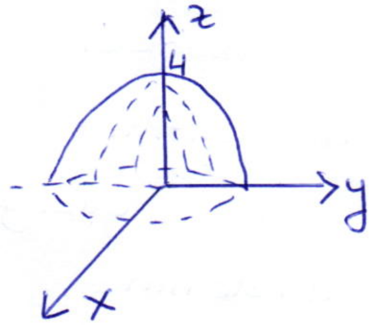
$x^2+y^2=z$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

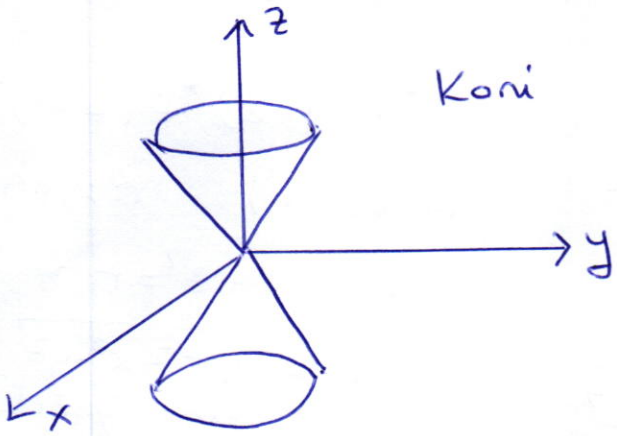
Üssü bir olan değişken paraboloidin eksenini gösterir.

ÖR/ $x^2+y^2=4-z$

$x=0 \quad y=0 \quad z=4$



Kollar aşağı



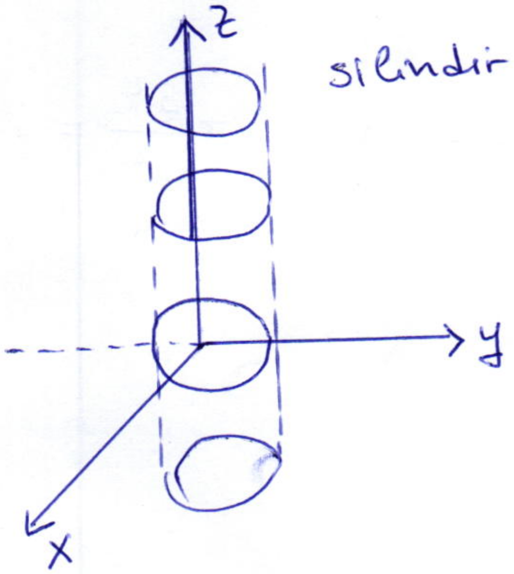
Koni

$x^2+y^2=z^2$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ üst koni

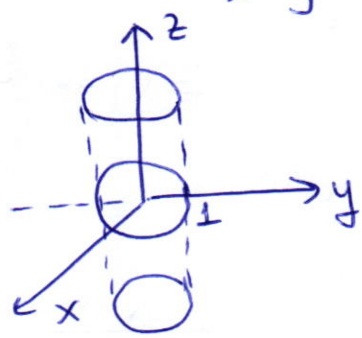
$x^2+y^2=r^2$ Düzlende çember uzayda silindir gösterir.

$M(a,b)$ $\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

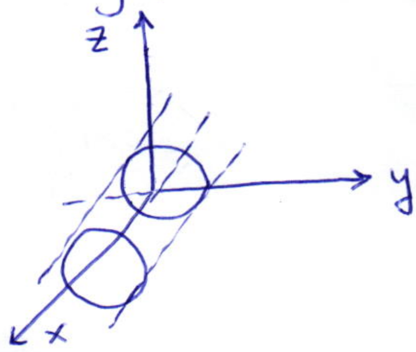


silindir.

$x^2+y^2=1$



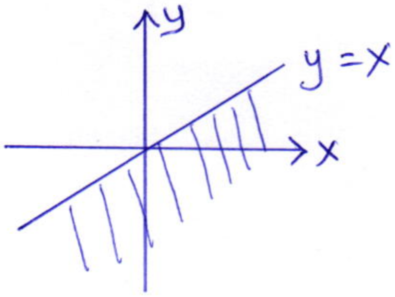
$y^2+z^2=1$



Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulalım.

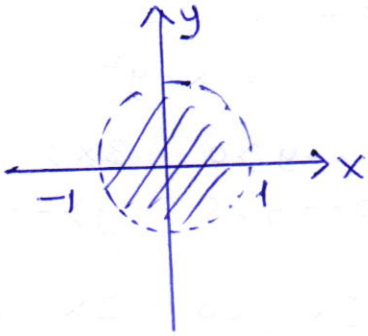
ÖR/ $z = f(x,y) = \sqrt{x-y}$

$x - y \geq 0 \quad x \geq y \Rightarrow y \leq x$

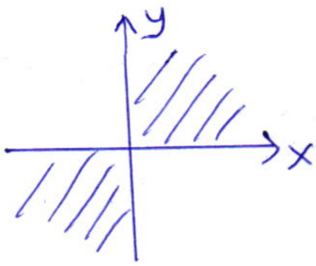


ÖR/ $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$

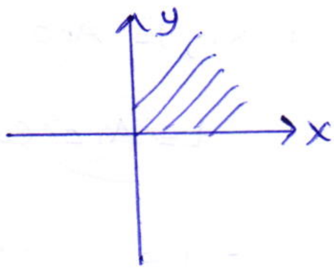
$1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$



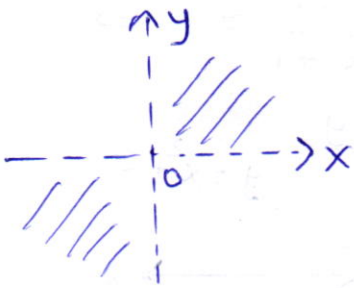
ÖR/ $z = \sqrt{xy}$ $\quad xy \geq 0$



ÖR/ $z = \sqrt{x}\sqrt{y}$ $\quad x \geq 0$ ve $y \geq 0$

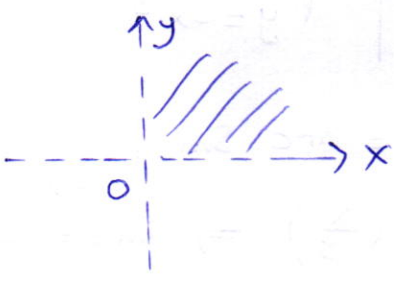


ÖR/ $z = \ln(xy)$ $\quad xy > 0$



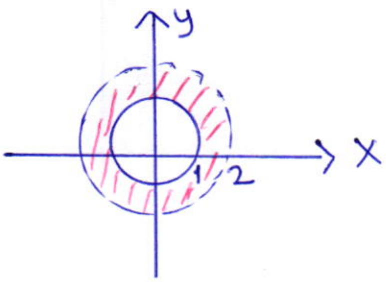
ÖR/ $z = \ln x + \ln y$

$x > 0$ ve $y > 0$



ÖR/ $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2)$ Tanım kümesi

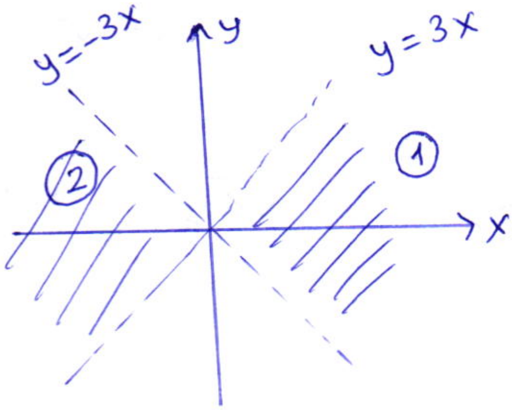
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1 \\ 4-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2 < 4 \end{array}\right\} \quad 1 \leq x^2+y^2 < 4$$



ÖR/ $z = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2-y^2}}$ $\qquad 9x^2-y^2 > 0 \Rightarrow (3x-y)(3x+y) > 0$

1) $\left.\begin{array}{ll} 3x-y > 0 & 3x > y \\ 3x+y > 0 & y > -3x \end{array}\right\} \; -3x < y < 3x$

2) $\left.\begin{array}{ll} 3x-y < 0 & 3x < y \\ 3x+y < 0 & y < -3x \end{array}\right\} \; 3x < y < -3x$

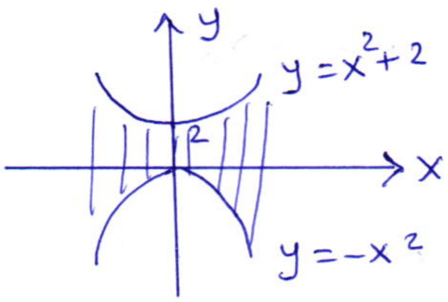


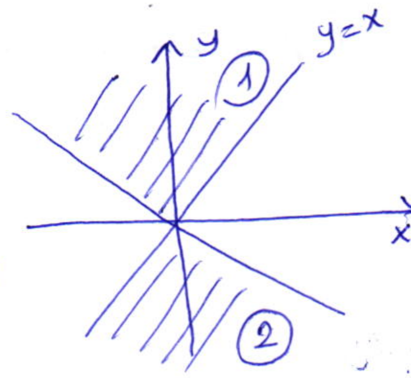
ÖR/ $f(x,y) = \operatorname{Arc\,Cos}\left(\dfrac{y-1}{x^2+1}\right)$

$$t = \operatorname{Arc\,Cos}\left(\frac{y-1}{x^2+1}\right) \Rightarrow \operatorname{Cos} t = \frac{y-1}{x^2+1}$$

$$-1 \leq \frac{y-1}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow -(x^2+1) \leq y-1 \leq x^2+1$$

$$-x^2 \leq y \leq x^2+1$$





ÖR/ $z = f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$z = \operatorname{Arc\,Sin}\left(\dfrac{x}{y}\right) \Rightarrow \operatorname{Sin} z = \dfrac{x}{y} \qquad -1 \leq \dfrac{x}{y} \leq 1$

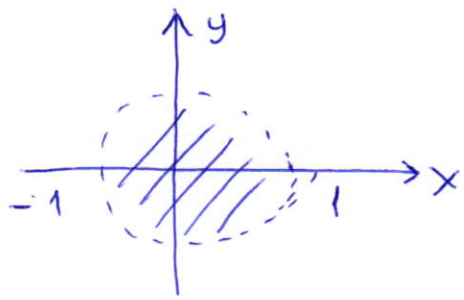
1) $y > 0$ ise $\; -y \leq x \leq y \Rightarrow -y \leq x$ ve $x \leq y$

2) $y < 0$ ise $\; y \leq x \leq -y \Rightarrow -y \geq x \geq y \Rightarrow -y \geq x$ ve $x \geq y$

Not: $y<0$ ise ve $a<b$ ise $ya > yb$dir.

ÖR/ $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ tanım kümesini bulalım.

$1-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2 < 1$



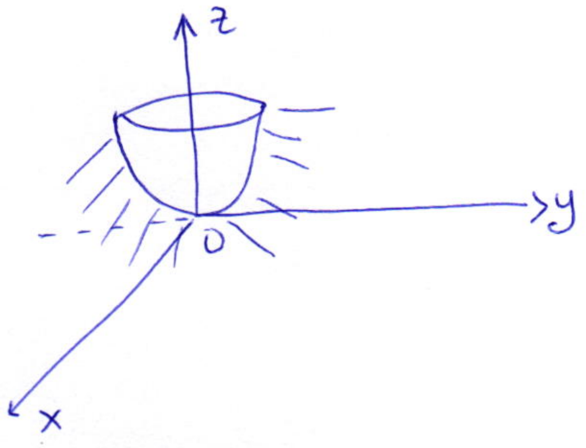
Üç değişkenli fonksiyonları

Eğer $D \subseteq R^3$ olmak üzere $F: D \to R$

$(x,y,z) \longrightarrow F(x,y,z)$ ise F ye üç değişkenli fonksiyon denir.

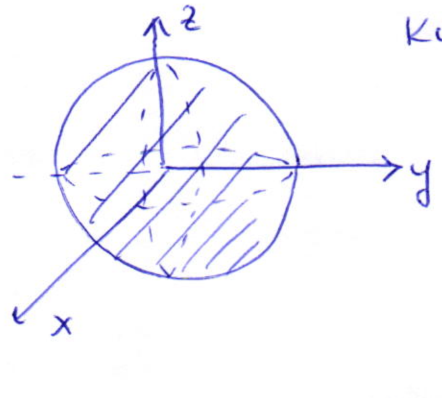
ÖR/ $F(x,y,z) = \ln(x^2+y^2-z)$ ise F in tanım kümesini bulunuz.

$x^2+y^2-z > 0 \Rightarrow x^2+y^2 > z$



ÖR/ $w = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ tanım kümesini bulunuz.

$1-x^2-y^2-z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1$



Küre denk

$x^2+y^2+z^2 = 1$

$M(0,0,0)$ $r=1$

Çok değişkenli fonksiyonlarda limit

Her pozitif ε sayısı için

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \quad \text{iken} \quad |f(x,y)-L| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı bulunabilirse $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti L dir denir.

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ ile gösterilir.

İki değişkenli fonksiyonlarda limit almak bir değişkenli fonksiyonlar ile karşılaştırılırsa çok daha zor bir işlemdir. Çünkü (a,b) ye sonsuz yönden yaklaşım söz konusudur.

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ dir diyebilmek için bu yaklaşımların hepsinde limit aynı olmalıdır.

İki kat Limit (Ardışık limit)

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ için

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y) = L_1\right] \text{ ve } \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right] = L_2$$

olsun.

a) $L_1 = L_2$ ise fonksiyonun (a,b) noktasında ardışık limiti vardır. (Fakat bunu söylemek $f(x,y)$ nin (a,b) de limite sahip olduğunu söylenez.)

b) $L_1 \neq L_2$ ise limit yoktur.

Limitin yokluğu için çift yol testi:

$f(x,y)$ fonksiyonunun (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (a,b) ye yaklaşırken farklı limitleri varsa bu durumda

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$ mevcut değildir.

1) Ardışık limite bakılarak limitin olmadığı gösterilir.

2) $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$ .. yolları boyunca alınan limitlerin sonucunun farklı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

3) $y=kx$, $y=kx^2$, veya $y=kx^3$ yolları boyunca alınan limitlerin k ya bağlı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

İki değişkenli fonksiyonların limitlerinin özellikleri

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

1) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \mp g(x,y) = L \mp M$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k \cdot f(x,y) = kL$$ (k herhangi bir skaler)

4) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \qquad M \neq 0$$

Limitleri hesaplarken belirsiz durum yoksa sıkıntı yoktur. Değerler yerine konur ve hesaplanır.

ÖR/ $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = ? \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}$$

$$= \frac{0-0\cdot1+3}{0^2\cdot1+5\cdot0\cdot1-1^3} = -3$$

ÖR/ $$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = ?$$

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

Eğer belirsizlik varsa ve bu belirsizlik çarpanlara ayrılarak sadeleştirme işleminden sonra giderilebiliyorsa bu durumda çarpanlara ayrılır sadeleştirme sonucunda değerler yerine yazılır ve hesaplanır.

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)^B$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \dfrac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \dfrac{x\,\cancel{(x-y)}\cdot \sqrt{x}+\sqrt{y}}{\cancel{x-y}} = 0$

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)^B$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2-y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = 0$

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \dfrac{x+y-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-y}} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)^B$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \dfrac{x+y-2}{\underbrace{\sqrt{x}+\sqrt{2-y}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{2-y}}_{x-(2-y)}} \cdot \sqrt{x}-\sqrt{2-y}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \dfrac{\cancel{(x+y-2)}(\sqrt{x}-\sqrt{2-y})}{\cancel{x-2+y}} = 0$

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}\sin xy}{xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy}\cdot \underbrace{\dfrac{\sin xy}{xy}}_{1}$

$= 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x-3y}{2x-y} = ?$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{4x-3y}{2x-y}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{4x-3y}{2x-y}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{-3y}{-y} = 3$$

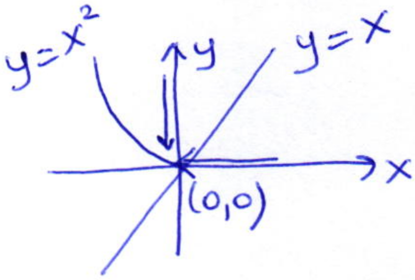
Limit yoktur.

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x-y+2xy} = ?$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x-y+2xy}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x-y+2xy}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{-y} = 0$$

olması limit olduğu anlamına gelmez.



$(0,0)$ noktasına $y=x$ doğrusu ile $y=x^2$ parabolü ile yaklaşabilirim.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to x}} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x-x+2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Limit yok.

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y} = ?$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0} \frac{x+y}{x-y}\right] = \lim_{x\to0}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0} \frac{x+y}{x-y}\right] = \lim_{y\to0}\frac{y}{-y} = -1$$

Limit mevcut değil.

ÖR/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{x^2+2y^2} = ?$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} \frac{3xy}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^2+0} = 0 \\ &\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} \frac{3xy}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{y\to0}\frac{0}{0+2y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \text{limit var diyemeyiz.}$$

Bu durumda $(0,0)$ dan geçen $y=kx$ doğrusunu alalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to0}\frac{3x.kx}{x^2+2k^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}(3k)}{\cancel{x^2}(1+2k^2)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{3k}{1+2k^2}$$

k ya bağlı limit yok.

ÖR /

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = ?$$

$x^2+y^2=t$

$\left.\begin{matrix} x\to 0 \\ y\to 0 \end{matrix}\right\} t\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

SIKIŞTIRMA TEOREMİ

$(x,y) \neq (a,b)$ için merkezi (a,b) de

olan bir dairenin içinde

$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ ise

ve $(x,y) \to (a,b)$ iken $g(x,y)$ ile

$h(x,y)$ aynı L limitine yaklaşıyorlarsa

o zaman $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ dir.

ÖR / $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$ old göster.

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$-\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\sqrt{x^2+y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \text{ dır.}$$

ÖR /

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orjinde

limitinin 0 olduğunu göster.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ olduğunu gösterelim.

Tanımdan ;

$\varepsilon > 0$ olmak üzere $0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

olduğundan $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ olacak

şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ varmı?

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

$\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$

bulunduğundan limit 0 dır.

* $x^2 \leq x^2+y^2$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2} \leq y$$

$\left| \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq |y|$ dır.

$\sqrt{y^2} = |y|$

$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

İki değişkenli fonksiyonlarda Süreklilik

Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bir $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında süreklidir.

1) $f(a,b)$ de tanımlıdır.

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ vardır.

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ dır.

ÖR/ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonksiyonunun $(0,0)$ da sürekli olup olmadığını araştıralım.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

$y = mx$ doğrusu için bakalım.

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x.mx}{x^2+m^2x^2} = \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

bu limit m ile değişir. $(x,y)\to(0,0)$ yaklaşırken f in limiti diyeceğimiz tek bir sayı yoktur. Limit bulunamaz ve fonk sürekli değildir.

ÖR/

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{3x+1}\dfrac{\sin(x^2+5y^2)}{x^2+5y^2} &, (x,y)\neq(0,0) \\ e &, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonunun $N(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını araştırınız.

1) $f(0,0)=e$

2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{3x+1}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+5y^2)}{x^2+5y^2}$$

$u=x^2+5y^2$

$\left.\begin{array}{l}x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right\} u\to 0$

$$=e\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=e\cdot 1=e$$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=e=f(0,0)$ fonksiyon $N(0,0)$da süreklidir.

ÖR/

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2-x+y}{x^2+y^2-2xy+3x-3y} &, (x,y)\neq(2,2)\\ a &, (x,y)=(2,2)\end{cases}$$

$f(x,y)$ nin $(2,2)$ noktasında sürekli olması için $a=?$

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{x^2-y^2-x+y}{x^2+y^2-2xy+3x-3y}=\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{(x-y)(x+y)-(x-y)}{(x-y)^2+3(x-y)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{\cancel{(x-y)}[x+y-1]}{\cancel{(x-y)}[x-y+3]}$$

$$=1$$

$a=1$ olmalı

KISMİ TÜREV

$z = f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre 1. mertebeden kısmı türevleri;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

(Türev alınırken y sabit tutulur)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

(Türev alınırken x sabit tutulur)

$f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ x,y bağlı fonksiyonlardır.

ÖR/ $z = x^3y^2 + x^4y + 4x^2y^2 + y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y + 8xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 8x^2y + 3y^2$$

ÖR/ $f(x,y) = e^{xy} \sin(x+y)$ $\quad f_x(0,\pi) = ?$

$$f_x = y e^{xy} \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y)$$

$$f_x \Big|_{(0,\pi)} = \pi e^0 \sin \pi + e^0 \cos(0+\pi) = -\pi$$

ÖR/ $f(x,y) = x^2y$ fonksiyonunun f_y yi tanımdan bul.

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2y}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^2h}{h} = x^2$$

ÖR/ $z = f(x,y) = xy + xe^{y/x}$ olsun.

$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\qquad$ $z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$z_x = y + e^{y/x} + x.\left(\frac{-y}{x^2}\right)e^{y/x}$

$= y + e^{y/x} - \frac{y}{x}e^{y/x}$

$z_y = x + x.\frac{1}{x}e^{y/x} = x + e^{y/x}$

ÖR/ $z = f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ için $f_x(1,1) + f_y(1,1) = ?$

$f_x = \frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f_x\Big|_{(1,1)} = \frac{-1}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2}$

$f_y = \frac{1/x}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f_y\Big|_{(1,1)} = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$

$f_x(1,1) + f_y(1,1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

ÖR/ $u = f(x,y,z) = x\tan z + z\tan y + e^z \sin[z(x-y)]$

$u_x,\ u_y,\ u_z = ?$

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \tan z + e^z.z.\cos[z(x-y)]$

$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = z.\sec^2 y - ze^z\cos[z(x-y)]$

$u_z = \frac{\partial u}{\partial z} = x.\sec^2 z + \tan y + e^z\sin[z(x-y)] + e^z(x-y).$

$\cos[z(x-y)]$

ÖR/ $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ türevlerinin $(0,0)$ değerlerini mevcut ise hesaplayınız.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} h . \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h . \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

BASİT ZİNCİR KURALI

$z = f(g(x,y))$ için

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(g(x,y))) = f'(g(x,y)) . g_x(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(g(x,y))) = f'(g(x,y)) . g_y(x,y)$$

ÖR/ $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ise $x . \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ old göster.

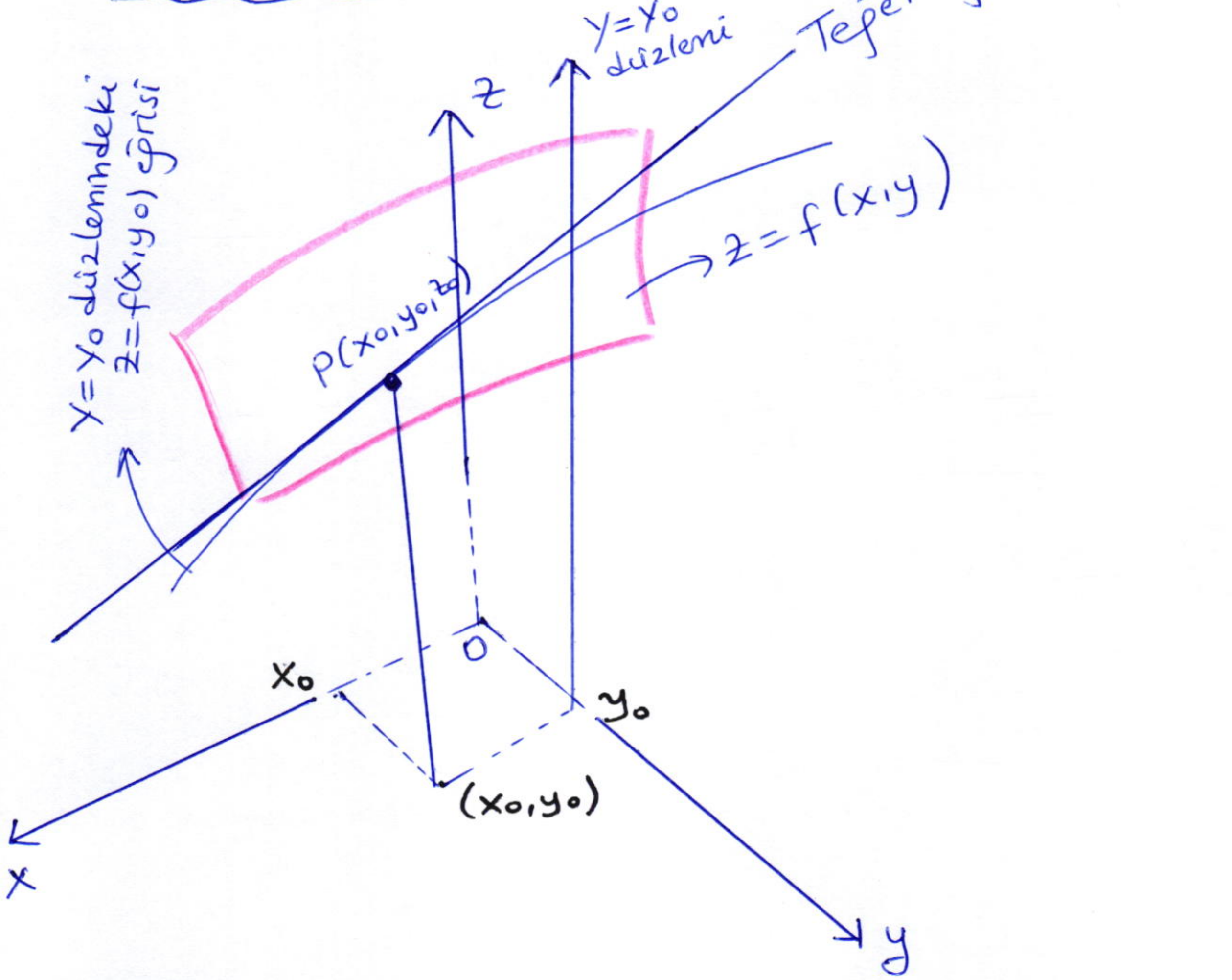
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'\left(\frac{x}{y}\right) . \frac{1}{y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f'\left(\frac{x}{y}\right) . \left(\frac{-x}{y^2}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$x . \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$x . \left[f'\left(\frac{x}{y}\right) . \frac{1}{y}\right] + \cancel{y} \left[f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{\cancel{y^2}}\right)\right]$$

$$= 0$$

KISMİ TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU



İki değişkenli bir $z=f(x,y)$ fonksiyonu için $f_x(x_0,y_0)$ ve $f_y(x_0,y_0)$ teğet doğrularının eğimlerini temsil eder.

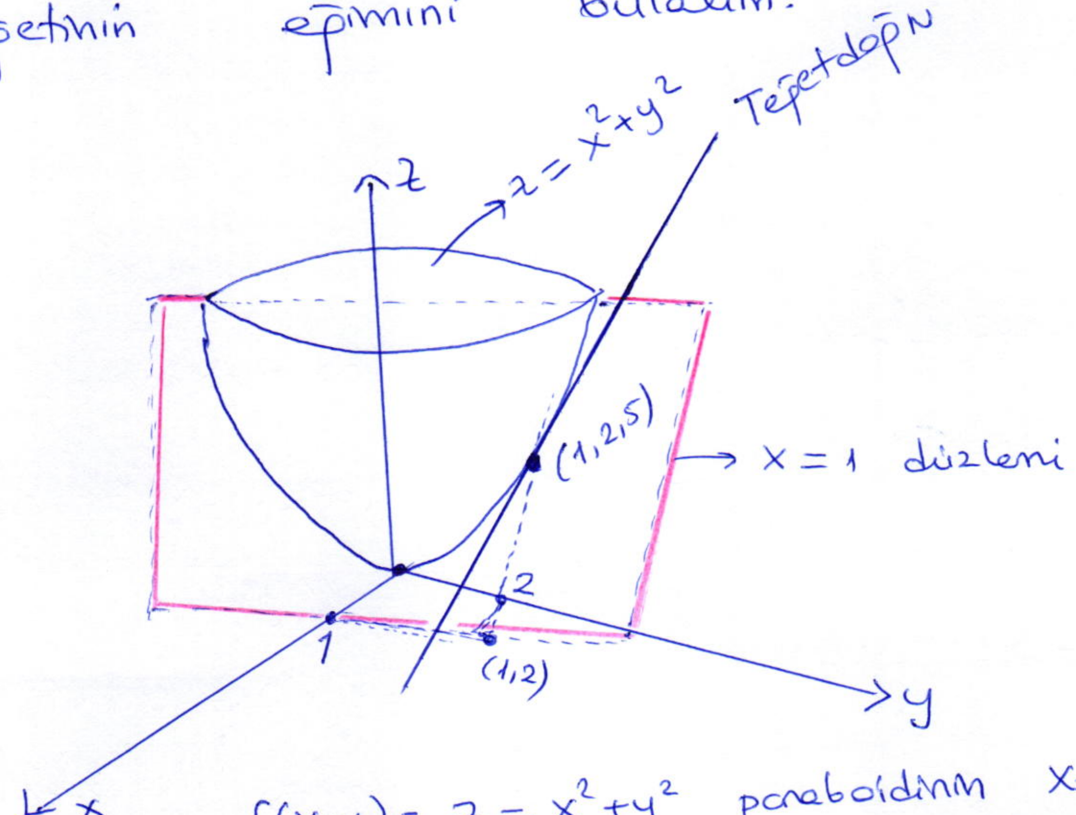
$\frac{\partial f}{\partial x}$ hesaplanırken y sabit tutulduğundan dolayı $P(x_0,y_0,z_0)$ noktasındaki x'e göre kısmi türev yüzeyin $y=y_0$ düzlemi ile arakesiti olan $z=f(x,y_0)$ eğrisinin bu noktadaki teğetinin eğimi olur.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \tan\alpha = m_1$$

Benzer şekilde $\frac{\partial f}{\partial y}$ hesaplanırken x sabit tutulduğundan dolayı $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki y'ye göre kısmi türev, yüzeyin $x = x_0$ düzlemi ile arakesiti olan $z = f(x_0, y)$ eğrisinin bu noktadaki eğimi olur.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \tan\beta = m_2 \text{ dır.}$$

ÖR/ $x = 1$ düzlemi $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle bir parabol üzerinde kesişir. Parabolün $(1,2,5)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulalım.



$f(x,y) = z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $x=1$ düzlemi ile arakesiti $z = 1 + y^2$ parabolüdür. Bu parabole $(1,2,5)$ noktasındaki teğet doğrunun eğimi $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 2y = 4$ dür.

Yüksek Mertebeden Türevler

$z = f(x,y)$ nin 2. mertebe kısmi türevleri;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yy}(x,y)$$

(Schwarz Teo)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}(x,y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}(x,y) \end{aligned}\right\} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ dir.}$$

ÖR/ $f(x,y) = x\cos y + e^x y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + e^x y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\sin y + e^x\right)$$
$$= -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos y + e^x y\right)$$
$$= -\sin y + e^x$$

KARIŞIK TÜREV TEOREMİ

Eğer $f(x,y)$ ve onun kısmi türevleri

f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} (a,b) de sürekli ve (a,b) yi

içeren bir bölgede tanımlı iseler

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) \text{ dir.}$$

ÖR/ $z = e^{kx} \cos ky$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ old göster.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx} \cos ky$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -k e^{kx} \sin ky$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -k^2 e^{kx} \sin ky \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -k^2 e^{kx} \sin ky$$

ZİNCİR KURALI

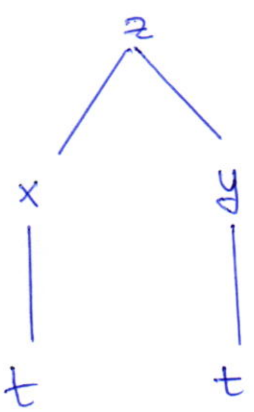
1 Eğer $z = z(x,y)$ 1. mertebe kısmi türevleri

sürekli olan bir fonksiyon ve

$x = x(t)$, $y = y(t)$ türevlenebilir fonksiyonlar

ise

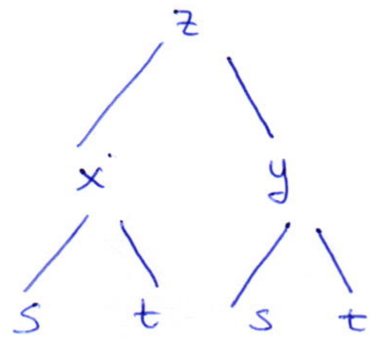
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$



② $z = f(x,y)$ 1. mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon ve

$x = x(s,t)$

$y = y(s,t)$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

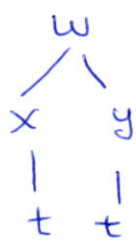
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

ÖR/ $w = xy$ $\quad x = \cos t$ $\quad y = \sin t$ $\quad \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/2}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= y(-\sin t) + x \cdot \cos t$$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/2} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$$



$x = \cos t$

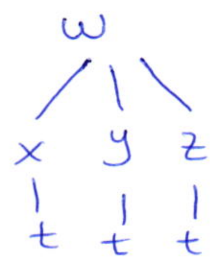
$x = \cos \pi/2 = 0$

$y = \sin t$

$y = \sin \pi/2 = 1$

ÖR/ $w = xy + z$ $\quad x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$

ise $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = ?$



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= y(-\sin t) + x \cdot \cos t + 1 \cdot 1$$

$$= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 = 2$$

$t = 0 \quad x = 1$

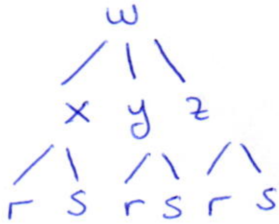
$t = 0 \quad y = 0$

$t = 0 \quad z = 0$

ÖR/ $w = 2y + x + z^2$

$x = r/s$, $y = r^2 + \ln s$, $z = 2r$

$\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ yi r ve s cinsinden bulunuz.



$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{-r}{s^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{s} + 2z \cdot 0$$

$$= \frac{2s - r}{s^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

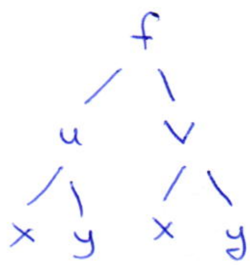
$$= 1 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot 2r + 2z \cdot 2$$

$$= \frac{1}{s} + 4r + 4z = \frac{1}{s} + 4r + 4 \cdot 2r = 12r + \frac{1}{s}$$

ÖR/ $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2y,\ x + 2y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x^2y,\ x + 2y)$

değerlerini f'in kısmi türevleri cinsinden bulun.

$$\left.\begin{array}{l} x^2y = u \\ x + 2y = v \end{array}\right\} f(u,v)$$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_u \cdot 2xy + f_v \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_u \cdot x^2 + f_v \cdot 2$$

Kapalı Fonksiyon Türevi

$$z = f(x,y) \Rightarrow F(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \text{ dir.}$$

İspat: $F(x,y,z) = 0$ ise

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}$$

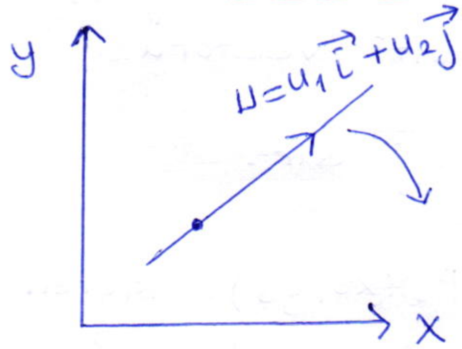
ÖR/ $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$ ise $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

1 yol: $3x^2 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y\left[ze^{xz} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} e^{xz}\right] + \frac{\partial z}{\partial y} \cos y = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y}$$

2. yol: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + yxe^{xz} + \cos y}$

Yönlü Türev



$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + u_1 t \\ y &= y_0 + u_2 t \end{aligned}\right\} \text{doğrusu}$$

$P_0(x_0, y_0)$ noktasında $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönünde $f(x,y)$ fonksiyonunun türevi, limitin mevcut olması halinde

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = (D_{\vec{u}} f)_{P_0} = (D_{\vec{u}} f)_{P_0}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_x(x_0,y_0) \rightarrow f\text{'in } \vec{i} \text{ yönündeki} \\ &f_y(x_0,y_0) \rightarrow f\text{'in } \vec{j} \text{ yönündeki} \end{aligned}\right\} \text{yönlü türevlerdir.}$$

ÖR/ Yönlü türev tanımı ile $P_0(1,2)$ noktasında $f(x,y) = x^2 + yx$ fonksiyonunun $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ vektörü yönündeki türevini hesaplayınız.

$$(D_{\vec{u}} f)_{P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s,\ 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right) - f(1,2)}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right) - 3}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}s + s^2}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{5}{\sqrt{2}} + s = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Gradyent Vektör

$f(x,y)$ fonksiyonunun gradyent vektörü

$$\text{Grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \text{ dir.}$$

Yönlü türev : Eğer $f(x,y)$, $P_0(x_0,y_0)$ içeren bir bölgede türevlenebilir ise, f'in P_0 daki $\vec{u}$ birim vektörü yönündeki türevi

$$(D_{\vec{u}} f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$ ile gösterilir.

ÖR/ $f(x,y) = xe^y + \cos xy$ nin $(2,0)$ noktasındaki $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevini bulunuz.

$\vec{u}$ birim vektör değil

$$\vec{u} = \frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\nabla f = (e^y - y\sin xy)\vec{i} + (xe^y - x\sin xy)\vec{j}$$

$$\nabla f\big|_{(2,0)} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$(\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right)$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

Yönlü Türevin Özellikleri

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cos\theta \qquad |\vec{u}| = 1 \ (u \text{ birim vektör})$$
$$= |\nabla f| \cdot \cos\theta$$

① $\cos\theta = 1$ yani $\theta = 0$ olduğunda f fonksiyonu en hızlı şekilde artar. (en büyük yönlü türevine ulaşır.) $\vec{u}$ ile ∇f aynı yöndedir. Yani f en çok P deki gradyent vektörü yönünde artar.
Bu yöndeki türevi;

$$D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos 0 = |\nabla f|$$

② Benzer şekilde f fonksiyonu en fazla $-\nabla f$ yönünde azalır. $(\theta = 180°)$
Bu yöndeki türev

$$D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos\pi = -|\nabla f|$$

③ $\nabla f \neq 0$ gradyenine dik olan herhangi bir $\vec{u}$ yönlü f deki sıfır değişimin yönüdür. çünkü $\theta = \pi/2$ dir.

$$D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos\pi/2 = 0 \text{ dır.}$$

ÖR/ $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulun.

a) $(1,1)$ de en çok artan
b) $(1,1)$ de en çok azalan
c) $(1,1)$ de f deki sıfır değişimin yönleri nedir?

a) $$\nabla f = \frac{2x}{2}\vec{i} + \frac{2y}{2}\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\nabla f \Big|_{(1,1)} = \vec{i} + \vec{j}$$

$\vec{u}$ ile ∇f aynı yöndedir.

$$\vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

b) $\vec{u}$ ile ∇f ters yönlü

$$\vec{u} = \frac{-(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

c) $\vec{u} \perp \nabla f \Rightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$\nabla f = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{u} \cdot \nabla f = 0 \Rightarrow (a\vec{i}+b\vec{j}) \cdot (\vec{i}+\vec{j}) = 0$

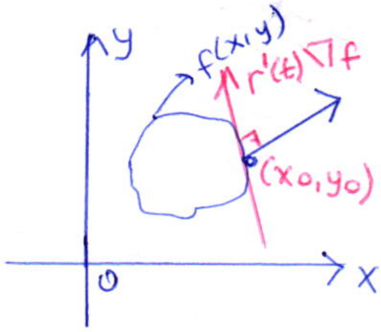
$a+b=0 \qquad a=1 \quad b=-1$

$a=-1 \quad b=1$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}, \quad \vec{u}_2 = \frac{-\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

Teorem; Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında türevlenebilir ve $\nabla f|_{(a,b)} \neq 0$ ise o zaman $\nabla f|_{(a,b)}$ vektörü f fonksiyonunun (a,b) noktasından geçen seviye eğrisinin bir normal vektörüdür.

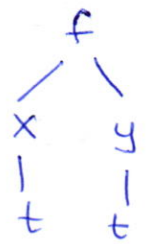
[yani ∇f, f in tanım kümesindeki her (x_0,y_0) noktasında seviye eğrisine diktir.]



Seviye eğrisi; $f(x,y)=c$ şartını sağlayan (x,y) noktalarının kümesine $f$in seviye eğrisi denir.

Teorem; Eğer $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonu $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ düzgün eğrisi boyunca sabit bir c değeri alıyorsa (bu eğriyi fonksiyonun seviye eğrisi yapar.) gradyent vektör teğet vektöre dik bir vektördür.

$$f(x,y) = f(x(t), y(t)) = F(t)$$



$f(x,y)=0$; kapalı fonk olarak alalım ; $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt} = 0$

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right]}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left[\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}\right]}_{\frac{dr}{dt}} = 0$$

$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

Normal vektör $\qquad \dfrac{dr}{dt} \longrightarrow$ Teğet vektör

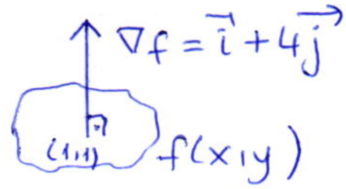
ÖR/ $f(x,y) = x^2y + y^3 - x + 1$ ise $\nabla f\big|_{(1,1)} = ?$

$$\nabla f = (2xy - 1)\vec{i} + (x^2 + 3y^2)\vec{j}$$

$$\nabla f\big|_{(1,1)} = (1,4)$$

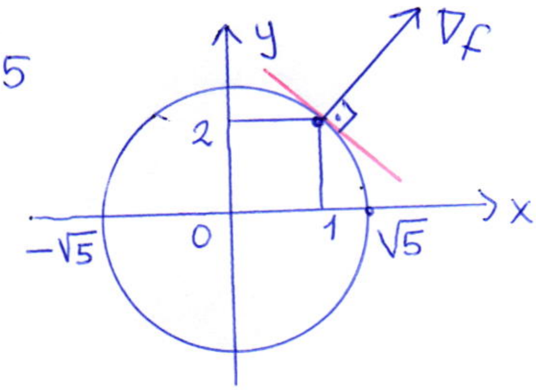
(1,1) noktasında fonksiyonuna çizilen dik vektör (1,4) dür.

Yani $\nabla f = \vec{i} + 4\vec{j}$ dir.



ÖR/ $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonk alalım. (1,2) noktasındaki gradyent vektörü bulalım.

$f(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5 \qquad x^2 + y^2 = 5$



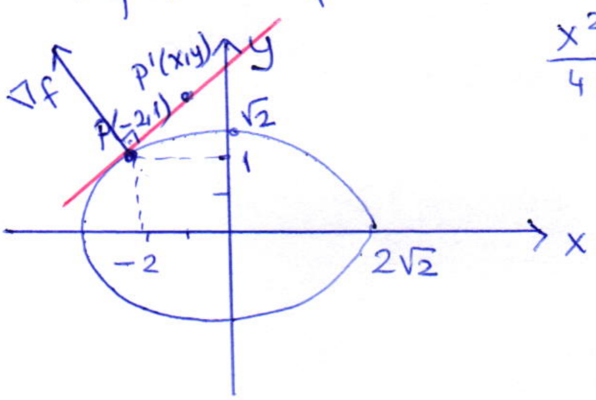
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

$$\nabla f\big|_{(1,2)} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

∇f, (1,2) noktasından geçen eğrinin teğetine diktir.

ÖR/ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ elipsi veriliyor. (−2,1) noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.



$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ Elips

$a = 2\sqrt{2} \quad b = \sqrt{2}$

$$\nabla f = \frac{2x}{8}\vec{i} + \frac{2y}{2}\vec{j} = \frac{x}{4}\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\nabla f = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{PP'} = (x - (-2))\vec{i} + (y - 1)\vec{j}$$

$$PP' = (x+2)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$

$$\nabla f \cdot \vec{PP'} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x+2) + (y-1) = 0$$

$$x - 2y = -4$$

Elipse (−2,1) noktasında teğet olan doğru denklemi

Teğet Düzlem, Normal Doğru

$f(x,y,z)=c$ fonksiyonu için;

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen teğet düzleme dik,

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen normal doğruya paraleldir.

$$\nabla f|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0}\vec{k}$$ olduğundan

① $f(x,y,z)=c$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki Teğet düzlemi

$$f_x|_{P_0}(x-x_0) + f_y|_{P_0}(y-y_0) + f_z|_{P_0}(z-z_0)=0 \text{ dır.}$$

② $f(x,y,z)=c$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki normal doğrusu

$$x = x_0 + f_x|_{P_0}\cdot t$$

$$y = y_0 + f_y|_{P_0}\cdot t \quad \text{dır.}$$

$$z = z_0 + f_z|_{P_0}\cdot t$$

ÖR/ $z = 9 - x^2 - y^2$ yüzeyinin $P_0(1,2,4)$ deki teğet düzlemi ve normal doğrusunu bulunuz?

$F(x,y,z) = 0$

$F: z + x^2 + y^2 - 9 = 0$ $\quad F_x = 2x \quad F_y = 2y \quad F_z = 1$

$\nabla F = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$

$\nabla F|_{P_0} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} = \langle \overset{a}{2}, \overset{b}{4}, \overset{c}{1} \rangle$

Teğet düzleme dik

Normal doğruya paralel

$2(x-1) + 4(y-2) + 1(z-4) = 0$

$2x + 4y + z = 14$ Teğet düzlem

$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 4t \\ z &= 4 + t \end{aligned}\right\}$ Normal doğru

ÖR/ $(0,0,0)$ noktasında $z = x\cos y - ye^x$ yüzeyine teğet olan düzlem denklemini bulunuz.

$f: z - x\cos y + ye^x = 0$

$F_x = -\cos y + ye^x \qquad F_x|_{(0,0,0)} = -1$

$F_y = x\sin y + e^x \qquad F_y|_{(0,0,0)} = 1$

$F_z = 1 \qquad F_z = 1$

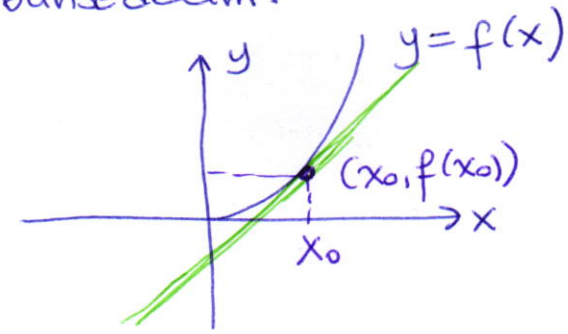
$\nabla F = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \langle \underset{A}{-1}, \underset{B}{1}, \underset{C}{1} \rangle$

$-1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0$

$\underbrace{-x + y + z = 0}_{\text{Teğet düzlem denk}}$

İki değişkenli fonksiyonlarda teğet düzlem denklemi ve lineerizasyon.

Matematik 1 deki teğet doğrudan biraz bahsedelim.



$f'(x_0) = m$

Teğet doğru denklemi; Bir noktasını ve eğimini bildiğim doğru denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Bu teğet doğrusu $(x_0, f(x_0))$ noktası civarında bu fonksiyonun lineerleşmiş halidir. Bu fonksiyon bu nokta civarında düz bir doğruya benzer. yani fonksiyonun o noktası civarındaki değerlerine bir yaklaşım sağlar. Benzer şekilde $z = f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki teğet düzlemi bu noktadaki lineerizasyonudur. Lineer yaklaşım (x_0, y_0) noktası civarındaki değerlerine bir yaklaşım sağlar.

Lineerleştirme:

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0,y_0) daki lineerleştirmesi;

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \text{ dir.}$$

$f(x,y) \approx L(x,y)$ dir.

Yani teğet düzlem denkleminde $z = L(x,y)$ $f(x,y) = L(x,y)$ alınarak elde edilen

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

fonksiyonuna f in (x_0,y_0) noktasındaki lineerleştirmesi dir.

* 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki lineerleştirmesi;

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f_x\Big|_{P_0}(x-x_0) + f_y\Big|_{P_0}(y-y_0) + f_z\Big|_{P_0}(z-z_0)$$

$f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$ dir.

Ör/ $\sqrt{(0,9)^2+3,1}$ değerini lineer yaklaşım kullanarak bulunuz.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$ $\quad x_0 = 1 \quad y_0 = 3$

$$f_x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y}} \qquad f_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}$$

$$L(x,y) = f(1,3) + f_x(x-1) + f_y(y-3)$$
$$= 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-3)$$

$$f(0,9;3,1) \approx L(0,9;3,1) = 2 + \frac{1}{2}(0,9-1) + \frac{1}{4}(3,1-3)$$
$$= 2 + \frac{1}{2}(-0,1) + \frac{1}{4}(0,1)$$
$$= 2 - 0,05 + 0,025$$

ÖR/ $\sin\left[\pi(0{,}01)(1{,}05) + \ln(1{,}05)\right]$ nin yaklaşık değerini lineer yaklaşımı kullanarak hesaplayınız.

$$f(x,y) = \sin(\pi x y + \ln y)$$

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1 \qquad f(0,1) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)} = \pi y \cos(\pi x y + \ln y) = \pi$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)} = \left(\pi x + \frac{1}{y}\right)\cos(\pi x y + \ln y) = 1$$

$$L(x,y) = f(0,1) + f_x\big|_{(0,1)}(x-0) + f_y\big|_{(0,1)}(y-1)$$

$$= 0 + \pi \cdot x + 1(y-1)$$

$$= \pi x + y - 1$$

$$f(0{,}01;\,1{,}05) \cong L(0{,}01;\,1{,}05) = \pi(0{,}01) + (1{,}05) - 1$$

$$= \pi(0{,}01) + 0{,}05$$

$$\cong 0{,}081416$$

ÖR/ $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2} y^2 + 3$ fonksiyonunun $(3,2)$ deki lineerleştirmesini bulunuz.

$$L(x,y) = f(3,2) + f_x\Big|_{(3,2)} (x-3) + f_y\Big|_{(3,2)} (y-2)$$

$$f_x = 2x - y$$

$$f_y = -x + y$$

$$f_x\Big|_{(3,2)} = 4 \qquad f_y\Big|_{(3,2)} = -1$$

$$L(x,y) = 8 + 4(x-3) - (y-2)$$
$$= 4x - y - 2$$

Diferansiyel

$z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri bir noktada mevcut ise fonksiyonun diferansiyeli tek değişkenli fonksiyonlardaki tanıma benzer olarak

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$ şeklinde verebiliriz.

Eğer $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - h f_x(x_0,y_0) - k f_y(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

$f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım: (x_0,y_0) da $z = f(x,y)$ nin lineerleştirmesinden elde edilen değişim

$$dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$$ f in tam diferansiyeli olarak adlandırılır.

ÖR/ $z = x^3 + 4y^5$ ise $dz = ?$

$$dz = 3x^2 dx + 20y^4 dy$$

ÖR/ $z = \cos 3x - \sin(xy)$ ise $dz = ?$

$$dz = (-3\sin 3x - y\cos(xy))dx + (-x\cos xy)dy$$

ÖR/ $f(x,y,z) = x^2 + 2y - 2xyz$ $\quad df\big|_{(1,1,-2)} = ?$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$df = (2x - 2yz)dx + (2 - 2xz)dy + (-2xy)dz$$

$$df\big|_{(1,1,-2)} = 6dx + 6dy - 2dz$$

$z = f(x, y)$ fonksiyonunu alalım.

$z_0 + \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$\Delta z \cong dz \qquad \Delta x \cong dx \qquad \Delta y \cong dy$

$dz = f_x \, dx + f_y \, dy$

$\Delta z \cong dz \Rightarrow f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \cong f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y$

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \cong f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y$

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0$

ÖR/ Diferansiyel yaklaşımı kullanarak,

$\sqrt{(2,08)^3+8(0,98)^4}$ değerini yaklaşık

olarak hesaplayınız.

$$f(x,y)=\sqrt{x^3+8y^4}$$

$x_0=2 \qquad y_0=1$

$$f(2,1)=\sqrt{2^3+8.1^4}=\sqrt{16}=4$$

$$\Delta x = x-x_0 = 2,08-2=0,08$$

$$\Delta y = y-y_0 = 0,98-1=-0,02$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8y^4}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{16y^3}{\sqrt{x^3+8y^4}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}=\frac{3}{2} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)}=4$$

$$f(x,y)\cong f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(2,08;0,98)\cong f(2,1)+f_x(2,1)(0,08)+f_y(2,1)(-0,02)$$

$$\cong 4+\frac{3}{2}(0,08)+4(-0,02)=4,04$$

ÖR/ $\sin\left[\pi(0{,}01)(1{,}05)+\ln(1{,}05)\right]$ nin

yaklaşık değerini lineer yaklaşım kullanarak

hesaplayınız.

Maksimum – Minimum Değerler

Tanım; $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktalarını içeren bir R bölgesinde tanımlı olsun.

Eğer merkezi (a,b) de olan bir açık daire içindeki tüm (x,y) tanım kümesi noktaları için

$f(x,y) \leq f(a,b)$ ise $f(x,y)$ de (a,b) de yerel maksimuma

$f(x,y) \geq f(a,b)$ ise $f(x,y)$ de (a,b) de yerel minimuma sahiptir.

Eğer $f(x,y)$ bir noktada yerel max veya yerel min sahip ise $f(x,y)$ nin o noktada bir ekstremuma sahip olduğunu söyleriz.

Teorem; Bir $f(x,y)$ fonksiyonu tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında aşağıdakilerden birini sağlıyorsa (a,b) bir kritik noktadır.

a) $f_x(a,b)=0$ ve $f_y(a,b)=0$

b) $f_x(a,b)$ veya $f_y(a,b)$ mevcut değildir.

Yerel ekstremum için gerekli şartlar;

$f(x,y)$ bir (a,b) noktasında yerel ekstremuma sahipse ve aynı noktada 1. mertebe kısmi türevleri mevcutsa $f_x(a,b)=0$ ve $f_y(a,b)=0$ dır.

Eyer noktası: $f(x,y)$ bir (a,b) kritik noktasında yerel ekstremuma sahip değilse bu noktaya eyer (semer) noktası denir.

* Bir (a,b) kritik noktası ve yeterince küçük bir h,k sayısı için;

$f(a+h, b+k) - f(a,b) \geq 0 \Rightarrow f$, (a,b) de yerel minimuma

$f(a+h, b+k) - f(a,b) \leq 0 \Rightarrow f$, (a,b) de yerel maksimuma sahiptir.

ÖR/ $f(x,y) = x^2+y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$f_x = 2x \qquad f_y = 2y \qquad \left.\begin{array}{l} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{array}\right\} x=y=0$

$(0,0)$ kritik nokta

$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^2+k^2 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel min noktası

ÖR/ $f(x,y) = x^2-y^2$

$f_x = 2x = 0 \quad x=y=0 \quad f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^2-k^2$

$f_y = 2y = 0 \quad (0,0)$ kritik nokta $\quad h^2-k^2 \geq 0$ veya $h^2-k^2 \leq 0$ olabilir. Eyer noktası

2. Türev Testi:

$f(x,y)$ nin bir (a,b) noktasında bir kritik noktaya sahip olduğunu kabul edelim. $f(x,y)$ ile onun 1. ve 2. mertebe türevleri sürekli ve $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ olsun.

$A = f_{xx}(a,b)$ $\quad B = f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

$C = f_{yy}(a,b)$ olmak üzere

a) $B^2 - AC < 0$ ve $A > 0$ ise f, (a,b) de yerel minimuma sahiptir.

b) $B^2 - AC < 0$ ve $A < 0$ ise f, (a,b) de yerel maksimuma sahiptir.

c) $B^2 - AC > 0$ ise f, (a,b) de bir eyer noktasına sahiptir.

d) $B^2 - AC = 0$ ise test sonuç vermez. f, (a,b) de bir maksimum, minimum değere veya bir eyer noktasına sahip olabilir.

ÖR/ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$f_x = 6x^2 - 6y = 0$

$f_y = -6x + 6y = 0$

$x = y$.

$6x^2 - 6x = 0$

$x = 0 \quad x = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (0,0)$ kritik

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \quad (1,1)$ nokta

$A = f_{xx} = 12x$

$B = f_{xy} = -6$

$C = 6$

$(0,0)$ noktası için; $f_{xx}\big|_{(0,0)} = 0 \quad f_{xy}\big|_{(0,0)} = -6$

$B^2 - AC = 36 - 0 = 36 > 0$ Eyer noktası

$(1,1)$ noktası için

$f_{xx}\big|_{(1,1)} = 12 \quad f_{xy}\big|_{(1,1)} = -6$

$B^2 - AC = 36 - 12.6 < 0 \quad A = 12 > 0$

$(1,1)$ yerel minimum

ÖR/ $f(x,y)=x^3-3x^2+3xy^2-3y^2$

$f_x=3x^2-6x+3y^2=0$

$f_y=6xy-6y=0$

$6y(x-1)=0$

$y=0 \quad x=1$

$x=1 \quad y^2=1 \Rightarrow y=\mp 1$

$(1,1), (1,-1)$

$y=0 \quad 3x^2-6x=0$

$x=0 \quad (0,0)$

$x=2 \quad (2,0)$

Kritik Noktalar

$A=f_{xx}=6x-6$

$B=f_{xy}=6y$

$C=f_{yy}=6x-6$

$(0,0)$ noktası içi

$f_{xx}|_{(0,0)}=-6 \quad f_{xy}|_{(0,0)}=0 \quad f_{yy}|_{(0,0)}=-6$

$B^2-AC= \quad 0-36<0 \quad A=-6<0$ yerel max

$(1,1)$ noktası içi

$f_{xx}|_{(1,1)}=0 \quad f_{xy}|_{(1,1)}=6 \quad f_{yy}|_{(1,1)}=0$

$B^2-AC=36>0$ Eyer nokta

$(1,-1)$ noktası içi

$f_{xx}|_{(1,-1)}=0 \quad f_{xy}|_{(1,-1)}=-6 \quad f_{yy}|_{(1,-1)}=0$

$B^2-AC=36>0$ Eyer nokta

$(2,0)$ noktası içi

$f_{xx}|_{(2,0)}=6 \quad f_{xy}|_{(2,0)}=0 \quad f_{yy}|_{(2,0)}=6$

$B^2-AC=-36<0 \quad A=6>0$ yerel min

ÖR/ $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 5$ fonk'nunun varsa kritik noktalarını sınıflandırınız.

$f_x = 4x^3 + 2xy^2 = 0$ $\quad x(4x^2+2y^2) = 0$ $\quad x = 0$

$f_y = 2x^2y + 4y^3 = 0$ $\quad y(2x^2+4y^2) = 0$ $\quad y = 0$

$4x^2+2y^2 \neq 0$

$2x^2+4y^2 \neq 0$

$(0,0)$ kritik nokta

$f_{xx} = 12x^2 + 2y^2$ $\quad A = 0$

$f_{xy} = 4xy$ $\quad B = 0$

$f_{yy} = 2y + 12y^2$ $\quad C = 0$

$\Big\}$ $B^2 - AC = 0$ test sonuç vermez.

$$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^4 + h^2k^2 + k^4 \cancel{-5} - (\cancel{-5})$$
$$= h^4 + h^2k^2 + k^4 > 0$$

olduğundan $f(0,0) = -5$ yerel minimuma sahiptir.

ÖR/ Eğer $f(x,y) = x \ln(x^2+y^2)$ ise, f nin yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

$$f_x = \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$f_y = 0 \Rightarrow y=0$ veya $x=0$

$y=0$ ve $f_x=0$

$\ln x^2 + 2 = 0$

$x = \mp e^{-1} = \mp \frac{1}{e}$ ✓

$x=0$ ve $f_x=0$

$\ln y^2 = 0 \Rightarrow y = \mp 1$ ✓

Kritik noktalar

$A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ $B\left(\frac{-1}{e}, 0\right)$ $C(0,-1)$ $D(0,1)$

$$f_{xx} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x(x^2+y^2)-4x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2x(x^2+y^2)-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$A\left(\frac{1}{e},0\right)$ için $f_{xx} = \frac{2}{x}\Big|_{(\frac{1}{e},0)} = 2e > 0$ $\quad B^2 - AC = 0^2 - 2e \cdot 2e = -4e^2 < 0$

$f_{xy} = 0$ $\quad f_{yy} = 2e > 0$

$A\left(\frac{1}{e},0\right)$ yerel min

$f\left(\frac{1}{e},0\right) = -2e^{-1}$

$B\left(\frac{-1}{e},0\right)$ yerel maks

$C(0,-1)$ $\quad f_{xx}\big|_{(0,-1)} = 0$ $\quad f_{xy}\big|_{(0,-1)} = \frac{2}{y}$ $\quad f_{yy} = 0$

$f_{xy} = -2$

$B^2 - AC = 4 > 0$ eyer (semer) noktası

$D(0,1) \rightarrow$ semer noktası