

Sonsuz Diziler

1

Bir dizi belli bir düzende yazılmış sayıların bir listesidir. Liste sonlu tane terimden oluşabileceği gibi, terimlerin sayısı sonsuzda olabilir.

Tanım: Reel sayıların bir dizisi, pozitif tamsayılar kümesi (veya onun bir alt kümesi) üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyondur.

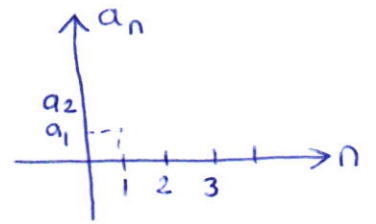
Sonsuz bir dizi $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur.

Bir f dizisi, her bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına bir $f(n)$ sayısı karşılık getirecektir.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = a_n$ ile gösterilir.

Bir dizi (a_n) , $\{a_n\}$ veya

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ile gösterilir.



$$a_n = \frac{1}{n} \quad \{a_n\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

$$b_n = \frac{n}{2^n} \quad \{b_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \dots \right\}$$

Bir $\{a_n\}$ dizisindeki a_n sayısına dizinin n^{th} termi denir.

a_1 1. terim

a_2 2. terim

$\vdots$

a_n n. terim dir.

Monoton diziler:

2

Tanım: Eğer her $n=1,2,3,\dots$ için

$a_n < a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ dizisi monoton artan dizi

aksi halde her $n=1,2,3,\dots$ için

$a_n > a_{n+1}$ ise monoton azalandır.

Artan veya azalan bir diziye monoton dizi denir.

ÖR/

$(a_n) = (3n-1) = (2, 5, 8, 11, \dots)$ dizisi monoton artan

$(a_n) = (-2n) = (-2, -4, -6, \dots)$ dizisi monoton azalan

ÖR/

$\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ dizisi gözönüne alındığında

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$a_n < a_{n+1}$ ise monoton artan , $a_n > a_{n+1}$ ise monoton azalan

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$$

"

"

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$$

"

veya $a_n - a_{n+1} < 0$ " veya $a_n - a_{n+1} > 0$ "

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \stackrel{?}{<} 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \stackrel{?}{>} 1$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1} < 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \text{ olduğu için}$$

$\{a_n\} = \frac{n}{n+1}$ dizisi monoton artandır.

Eğer $n \geq 1$ için $a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ azalmayan dizi
 $n \geq 1$ için $a_n \geq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ artmayan dizi

ÖR / $\{(n-1)(n-2)+7\}$ dizisi monoton azalmayan dizidir.

$$n=1, 2, 3, \dots$$

$$\{7, 7, 9, 13, 19, \dots\}$$

ÖR / $(a_n) = (n^2 - 4n)$ dizisinin monoton artan veya azalan olduğunu bulunuz.

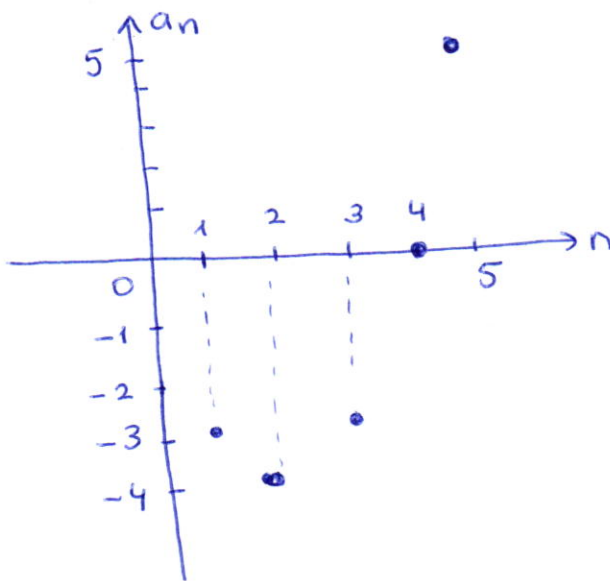
$$a_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 \quad a_4 = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$$

$$a_2 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \quad a_5 = 5^2 - 4 \cdot 5 = 5$$

$$a_3 = 3^2 - 4 \cdot 3 = -3$$

!

Bu dizide $a_1 > a_2$ olduğu halde $a_2 < a_3$ tür.
 Yani bu dizi monoton değildir.



Grafikten de anlaşıldığı üzere dizinin terimleri azalırken, sonra artmaya başlıyor.

Yani bu dizi monoton artan veya azalan değildir.

ÖR/

$(a_n) = ((-1)^n \cdot n)$ dizisinin monoton dizi olup olmadığını bulalım.

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (-1)^{n+1} (n+1) - (-1)^n \cdot n \\ &= (-1)^n [(-1)(n+1) - n] \\ &= (-1)^n [-2n-1] \end{aligned}$$

n çift $(-1)^n (-2n-1) = -2n-1 < 0$

n tek $(-1)^n (-2n-1) = 2n+1 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $a_{n+1} - a_n$ ifadesinin işaretine pozitif veya negatif diyebiliriz. (a_n) dizisi monoton değildir.

ÖR/ Genel terimi $a_n = \begin{cases} 1, & n < 4 \text{ ise} \\ 1/n, & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$

olan dizinin azalmayan veya artmayan dizi olup olmadığını bulalım.

(a_n) dizisinin terimleri,

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = \frac{1}{4} \quad a_5 = \frac{1}{5} \quad a_6 = \frac{1}{6}$$

$$(a_n) = (1, 1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$$

dizisi monoton artmayan bir dizedir.

ÖR/ $(a_n) = (n^2 - 3n + 2)$ dizisinin monoton azalmayan veya monoton artmayan olduğunu bulalım.

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 2 - (n^2 - 3n + 2)$$

$$\begin{aligned} &= 2n - 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } 2n - 2 &\geq 0 \text{ oldudan } a_{n+1} - a_n \geq 0 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dizi monoton azalmayan dizedir.

Sınırlı diziler

5

Tanım: Eğer her $n=1,2,3,\dots$ için $m \leq a_n$ oluyorsa,

$\{a_n\}$ dizisi m ile alttan sınırlıdır.

Bu durumda m , $\{a_n\}$ dizisi için bir alt sınırdır.

Alt sınırlar içinde en büyük olanına en büyük alt sınır denir (EBAS)

Eğer her $n=1,2,3,\dots$ için $a_n \leq M$ oluyorsa, $\{a_n\}$ dizisi M ile üstten sınırlıdır. ve M , $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. Üst sınırlar içinde en küçük olan en küçük üst sınır denir (EKÜS)

Eğer $\{a_n\}$ hem alttan ve hem de üstten sınırlı ise $\{a_n\}$ ye sınırlı dizi denir.

Sınırlı dizi için şu şekilde tanım yapılabilir.

$\{a_n\}$ dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $m \leq a_n \leq M$ olacak şekilde $m \in \mathbb{R}$ ve $M \in \mathbb{R}$ varsa $\{a_n\}$ dizisine sınırlı dizi denir.

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ dizisi sınırlıdır.

$n \geq 1$ için

$$\frac{n}{n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \quad a)$$

$$b) \quad 0 < \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

$$\begin{array}{ccc} 0 < \frac{1}{n} & \leq & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{alt} & & \text{M üst sınır} \\ \text{sınır} & & \end{array}$$

ör / $\{a_n\} = \frac{n}{n+1}$ dizisi sınırlıdır.

6

Dizinin genel terimi $a_n = \frac{n}{n+1}$ dir.

$n \geq 1$ olduğundan

$$n+n \geq 1+n$$

$$2n \geq 1+n$$

$$\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} *$$

Yani dizi $\frac{1}{2}$ ile alttan sınırlıdır.

Ayrıca her n için

$$n < n+1$$

$$\frac{n}{n+1} < 1 \text{ olduğundan}$$

dizi 1 ile üstten sınırlıdır.

Sonuç olarak

$\forall n=1,2,3,\dots$ için

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1 \text{ dir.}$$

Bir Dizinin Limiti

7

$\{a_n\}$ bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde ε bağlı bir $N > 0$ mevcut ise $\{a_n\}$ dizisinin L sayısına yakınsadığı söylenir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ dir denir.

Bir dizinin limiti yoksa veya $\neq \infty$ ise dizi iraksaktır.

ör/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ dizi yakınsak}$$

ör/ $\{a_n\} = \{n\} = \{1, 2, \dots\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ dizi iraksak}$$

ör/ $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ Limiti mevcut değildir. Dizi iraksaktır.

Teorem: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, $a_n = f(n)$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ dir.}$$

1) Limit varsa tekler.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (k a_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

7) Diziler için sıkıştırma kuralı mevcuttur.

$$\forall n \text{ için } a_n \leq b_n \leq c_n \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \text{ dir.}$$

Bazı Özel Limitler

1) Eğer $x > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1$ dir.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln x^{1/n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x^{1/n}} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

2) $|x| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ dir.

3) $\forall k > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$

4) $\forall x$ reel sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Teorem; Bir $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır.

Sınırlı diziler yakınsak olmayabilir.

Fakat sınırlı monoton diziler yakınsaktır.

Monoton artan ve üstten sınırlı her dizi yakınsaktır. Dizinin EBAS'ı ilk terimi, $\lim$ 'i EKÜS'dir.

Monoton azalan ve alttan sınırlı her dizi yakınsaktır. Dizinin EBAS'ı $\lim$ 'ne, ilk terimi EKÜS'dir.

ÖR/ $(a_n) = \left(\frac{3n-1}{n+3} \right)$ dizisinin sınırlı ve monoton olduğunu gösterelimiz.

$$a_n = \frac{3n-1}{n+3} = 3 - \frac{10}{n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

a) sınırlı olduğunu gösterelim.

$$n \geq 1$$

$$n+3 \geq 4$$

$$\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{-10}{n+3} \geq \frac{-10}{4}$$

$$3 - \frac{10}{n+3} \geq 3 - \frac{10}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$3 - \frac{10}{n+3} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n+3} > 0$$

$$\frac{-10}{n+3} < 0$$

$$3 - \frac{10}{n+3} < 3$$

$$\frac{1}{2} \leq 3 - \frac{10}{n+3} < 3$$

↓

↓

b) monoton olduğunu gösterelim. EBAS

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-1}{n+4} - \frac{(3n-1)}{n+3} = \frac{10}{(n+4)(n+3)} > 0$$

olduğundan monoton artan

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{e^n}{1-e^n} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1-e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n(1/e^n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/e^n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad = -1$$

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \frac{\sqrt{n}+2}{n+1} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0} \\ &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

ÖR/ $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{1+n^2}{2+n^2} \right)^n \right\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n^2}{2+n^2} \right)^n \quad \begin{array}{l} n^2+1 \\ -n^2+2 \\ \hline -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2+n^2 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2+2} \right)^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2+2} \right)^{\frac{n^2+2}{n^2+2}} \right]^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2+2} \right)^{n^2+2}}_{e^{-1}} \right]^{\frac{n}{n^2+2}} = (e^{-1})^0 = 1 \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n^2(1+\frac{2}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1+\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖR / $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = ?$ $(\frac{\infty}{\infty})^B$ (L'Hopital kuralı)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖR / $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \ln n}{n^2 + 1} = ?$ $(\frac{\infty}{\infty})^B$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}}{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + 1}{2n} = (\frac{\infty}{\infty})^B \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2} = 0 \end{aligned}$$

ÖR / $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sin(\frac{1}{n})} = ?$

Hatırlatma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \ln e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{x^2} = \ln 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}_1 \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}}}_1 \\ = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$$

ÖR/ Genel terimi $a_n = n - \ln(e^n + 1)$
olan dizinin limitini bulunuz.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} [n - \ln(e^n + 1)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln e^n - \ln(e^n + 1)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^n}{e^n + 1} \right) \\
 &= \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^n}{e^n + 1} \right) \right] \\
 &= \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n} \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)} \right] \\
 &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^n}} = \ln 1 = 0
 \end{aligned}$$

ÖR/ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = ?$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) \cdot \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{(\sqrt{n^2 + 2n} + n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right)} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{2}{2} = 1
 \end{aligned}$$

ÖR / $\left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

Sıkıştırma teo den

$$\forall n \text{ için } |\cos n| \leq 1$$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \text{ dir.}$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$a_n \leq b_n \leq c_n$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right\} \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \text{ dir.}$$

ÖR / $\{a_n\} = \left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}$ dizisinin limitinin 0 olduğunu gösteriniz.

1 yol: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \stackrel{\infty/\infty \text{ bel}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2n} = 0$

2 yol: $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ? \quad (\text{Sıkıştırma teo})$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \text{ dir.}$$

$$\forall n = 1, 2, 3 \dots \text{ için}$$

$$n \geq 1 \text{ için } \ln n \geq 0$$

$$\frac{\ln n}{n^2} \geq 0 \quad (1)$$

$$n \geq 1 \text{ için}$$

$$\ln n \leq n$$

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0 \quad \checkmark$$

~~ÖR~~ $\{a_n\} = \{ \sqrt{e^{2n}-1} - e^n \}$

dizisinin yakınsaklığını inceleyelimiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{e^{2n}-1} - e^n)(\sqrt{e^{2n}-1} + e^n)}{\sqrt{e^{2n}-1} + e^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} - 1 - e^{2n}}{\sqrt{e^{2n}-1} + e^n} = \frac{-1}{\infty} = 0 \text{ yakınsak}$$

~~ÖR~~ $\{a_n\} = \left\{ \frac{n + \arctan n}{\sqrt{n^2+1}} \right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyelimiz.

$x \geq 1$ için $f(x) = \frac{x + \arctan x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{\arctan x}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}}_1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\arctan x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}}_{0 \cdot 1} = 1 \text{ yakınsak}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) B \quad \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

ÖR / Ardışık olarak $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $n \geq 1$ doğal sayısı 14

için $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi

için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ olduğuna göre

$\left\{ \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+a_n} - 1 - 1}{a_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+a_n} - 2}{a_n - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3+a_n} - 2)(\sqrt{3+a_n} + 2)}{(a_n - 1)(\sqrt{3+a_n} + 2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \cancel{a_n} - 4}{(\cancel{a_n} - 1)\sqrt{3+a_n} + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3+a_n} + 2} = \frac{1}{\sqrt{3+1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{ olduğum} \right)$ ✓

ÖR / Eger $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ve $2a_n + 3a_{2n+1} = \frac{5n+1}{2n+3}$ ise $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Not: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ise

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n+3} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3a_{2n+1} = \frac{5}{2}$$

$$2 \cdot a + 3 \cdot a = \frac{5}{2} \Rightarrow 5a = \frac{5}{2} \quad a = \frac{1}{2}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ dir.

Seriler

15

Belli bir kuralla birbirine beğli sayılar dizisinin tüm elemanlarının toplamından oluşan ifadeye seri denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Kısmi Topamlar Dizisi

$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ sonsuz bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerini kullanarak

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

!

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ kısmi toplamlarını yazalım.}$$

Böylece yeni bir $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ dizisi elde ederiz.

Tanım: $\{a_n\}$ dizisinden elde edilen $\{S_n\}$ kısmi

topamlar dizisine bir seri ve

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ toplamına serinin } n\text{-inci}$$

kısmi toplamı denir.

OR / $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\dots$

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

iraksolutu

Tanım; $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ise yani kısmi toplamlar 16

dizisi sonlu bir limit değerine sahip ise,

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine yakınsak denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \text{ yazılır.}$$

Eğer kısmi toplamlar dizisi ıraksak ise,

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine ıraksak denir. Bir serinin

yakınsak veya ıraksak olmasına serinin karakteri denir.

Yakınsak iki serinin toplamı ve farkı yakınsaktır.

Yakınsak " " bir sayı ile çarpımı yakınsaktır.

IRAKSAKLIK TESTİ (N.th terim testi)

Eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ (veya $\neq \infty$) ise

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$ serisi ıraksaktır.

$$a_n = \frac{n+1}{2n+3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

olup seri ıraksaktır

* Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ dır.

Bunun tersi deñil değildir.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ ise, $\sum a_k$ serisi yakınsak da,

ıraksak ta olabilir.

ÖR/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ serisi iqm $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \ln k} = 0$ dır.

serinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı iqm birşey söylenemez.

Teleskopik Seri

Bazı seriler terimleri birbirlerini sonsuza kadar yökederek devam ediyorsa böyle serilere teleskopik seri denir.

$$\text{ÖR} / \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = ?$$

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$A=1 \quad B=-1$$

bulunur.

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = 1 \text{ dir.}$$

$$\text{ÖR} / \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = ?$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n$$

$$S_n = -\underbrace{\ln 1}_0 + \ln(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$$

a ve r birer reel sayı olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots \text{ serisine başlangıç}$$

termi a ve oranı r olan geometrik seri denir.

$$a \neq 0 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} \text{ serinin toplamı, } |r| < 1 \text{ ise yakınsak} \\ \text{ıraksak, } |r| \geq 1 \end{cases}$$

ör

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

$$a = \frac{1}{2} \quad r = \frac{1}{2} < 1$$

Seri yakınsak

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{e})^{1-4n}$ toplamını bulunuz.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{e}) (\sqrt{e})^{-4n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{e} (e^{-2})^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{e} (e^{-2}) (e^{-2})^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{e}}{e^2} \cdot (e^{-2})^{n-1} \end{aligned}$$

$$a = \frac{\sqrt{e}}{e^2} \quad r = \frac{1}{e^2} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$= \frac{\sqrt{e}/e^2}{1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)} = \frac{\sqrt{e}}{e^2 - 1}$$

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{3}$$

ör/ Eğer $n \geq 0$ bir tamsayı ise $\sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k}$ toplamını bulunuz

$m = k - n$ olsun.

$$\sum_{m=0}^{\infty} 3^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

ör/ $1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\pi^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \text{ geo seri}$$

$$|r| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi}\right) \left(-\frac{1}{\pi}\right)^{n-1}$$

$$r = -\frac{1}{\pi} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\pi}}{1 - \left(-\frac{1}{\pi}\right)} = \frac{-\frac{1}{\pi}}{\frac{\pi+1}{\pi}} = -\frac{1}{\pi+1}$$

ör/

$$1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$a=1 \quad r=\sqrt{2} > 1 \text{ iraksak}$$

ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \text{ geo seri}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad a=1 \quad r=\frac{1}{e} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

ör/ $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^{k/2} \cos k\pi$ toplamını bulunuz.

$$\cos k\pi = (-1)^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi^{k/2} \cos k\pi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \pi^{k/2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1 \cdot \sqrt{\pi})^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-\sqrt{\pi})^{k-1} \cdot (-\sqrt{\pi})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-\sqrt{\pi}) (-\sqrt{\pi})^{k-1}$$

$$a = -\sqrt{\pi} \quad r = -\sqrt{\pi} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{-\sqrt{\pi}}{1-(-\sqrt{\pi})}$$

ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ toplamını bulunuz.

Geo seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n \quad a=1 \quad r=\frac{e}{\pi} < 1 \text{ seri yakınsak}$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{e}{\pi}}$$

ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}} = ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{10^3}\right)^n$$

Geo Seri

$$a=5 \quad r=\frac{1}{10^3} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$S = \frac{5}{1-\frac{1}{10^3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ harmonik seri ıraksaktır.}$$

p-serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \quad \begin{cases} p \leq 1 & \text{ıraksak} \\ p > 1 & \text{yakınsak} \end{cases}$$

Pozitif terimli serüler için yakınsaklık testleri

INTEGRAL TESTİ:

Teo: f' , $[1, \infty)$ aralığında sürekli, azalan ve pozitif değerleri bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall n \geq 1$ tamsayısı için $a_n = f(n)$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ serisi ve $\int_1^{\infty} f(x) dx$ improper integrali her ikisi birden ya yakınsar ya da ıraksar.

Yani serinin yakınsak olması için $\int$ yk improper integralinin yakınsak olmasıdır.

ör / $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisi yakınsaktır.

$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ fonk $[1, \infty)$ sürekli, pozitif değerli ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} \quad u = \ln x \quad du = dx/x$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan(\ln x) \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(\ln b) - \arctan(\underbrace{\ln 1}_0)) = \pi/2$$

Seri
Yakınsak

ÖR/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}$ serisinin karakterini belirleyelimiz.

22

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ fonksiyonu $[2, \infty)$ aralığında sürekli ve pozitif değerlidir. $x \geq 2$ için

$$f'(x) = -\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)^{3/2}} < 0 \text{ azalandır.}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cancel{\sec t} \cdot \cancel{\tan t} dt}{\cancel{\sec t} \sqrt{\sec^2 t - 1}} \quad \begin{array}{l} x = \sec t \\ dx = \sec t \cdot \tan t dt \end{array}$$
$$= \int dt = t + C$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \text{Arc Sec } x \Big|_1^b$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\text{Arc Sec } \underset{\downarrow \infty}{b} - \text{arc Sec } 2 \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}$ serisi yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$

p serisini integral testi ile inceleyelim.

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

$[1, \infty)$ aralığında $f(x) = \frac{1}{x^p}$ fonksiyonu sürekli, azalan ve pozitif değerlidir.

$p > 1$ için serinin yakınsak olduğunu gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b \\
 &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) \\
 &\quad p-1 > 0 \\
 &= \frac{1}{1-p} (0-1) = \frac{1}{p-1}
 \end{aligned}$$

Seri yakınsaktır.

Örnek $p < 1$ ise seri iraksaktır. Gösterelim.

$$p < 1 \Rightarrow 1-p > 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) \\
 &\quad p-1 = -\underbrace{(1-p)}_{>0} \\
 &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1) = \infty
 \end{aligned}$$

olup seri iraksaktır.

$p=1$ ise

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \ln b - \ln 1 \\
 &= \ln \infty = \infty \\
 &\quad \text{iraksak}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots \quad p \text{ serisi}$$

$p \leq 1$ iraksak

$p > 1$ yakınsak

ör/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2/2}}$ serisinin karakterini belirleyelimiz. ²⁴

$a_n = f(n)$ dersek $f(x) = x e^{-x^2/2}$ $[1, \infty)$
aralığında pozitif ve sürekli dir.

$$f'(x) = (1 - x^2) e^{-x^2/2} = 0 \quad x = \pm 1$$

$x > 1$ ise $1 - x^2 < 0$ olduğundan $f'(x) < 0$ dir.
ve fonksiyon azalandır.

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x e^{-x^2/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-x^2/2} \Big|_1^b \right)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\underbrace{-e^{-b^2/2}}_0 + e^{-1/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ Seri yakınsak}$$

Mukayese (Karşılaştırma) testi:

$\sum a_k$ ve $\sum b_k$ terimleri negatif olmayan iki
seri olsun.

Bu takdirde

a) Eğer $\forall k$ için $a_k \leq b_k$ ve $\sum b_k$ serisi
yakınsak ise $\sum a_k$ serisi de yakınsaktır.

b) Eğer $\forall k$ için $a_k \geq b_k$ ve $\sum b_k$
serisi ıraksak ise $\sum a_k$ serisi de ıraksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ serisinin karakterini belirleyiniz. 25

Mukayese (Karşılaştırma testi)

$$\forall n \geq 0 \text{ için } 2^n \leq 2^n + n \quad a_n \leq b_n$$
$$\frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^n+n} \Rightarrow \frac{1}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi yakınsak olduğundan (geo seri $r = \frac{1}{2} < 1$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ serisi de yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$k \geq 2 \text{ için } k < e^k \Rightarrow \ln k < k$$
$$\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmonik seri) inaksak olduğundan $a_k > b_k$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ de inaksaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$n \geq 1 \text{ için } n < n+1$$
$$n^3 < (n+1)^3$$
$$\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ serisi p serisi yakınsak dolayısıyla $p=3$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ de yakınsaktır.

$\sum a_k$ terimleri negatif olmayan bir seri ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = p \text{ olsun.}$$

- 1) Eğer $p < 1$ ise $\sum a_k$ serisi yakınsaktır.
- 2) Eğer $p > 1$ ise $\sum a_k$ serisi iraksaktır.
- 3) Eğer $p = 1$ ise bu test sonuç vermez.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 5}{3^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + 5)^{1/n}}{3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[2^n \left(1 + \frac{5}{2^n} \right) \right]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{5}{2^n} \right)^{1/n} \\ &= \frac{2}{3} < 1 \text{ yakınsak} \end{aligned}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 + n} \right)^n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n^2 + n} \right)^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + n} = 0 < 1 \text{ yakınsak} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = 0 \end{aligned}$$

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(e^k - k)^k}$ serisinin karakterini belirleyiniz. 27

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{(e^k - k)^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{2/k}}{e^k - k} = ?$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{2/k}}{e^k - k} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

Seri yakınsaktır.

* $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{2/k} = ?$ $(\infty^0)^B$

$$y = k^{2/k}$$

$$\ln y = \ln k^{2/k} = \frac{2}{k} \ln k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \ln k}{k} \quad (\infty/\infty)^B$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2/k}{1} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{2/k} = e^0 = 1$$

* $\lim_{k \rightarrow \infty} e^k - k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^k \left(1 - \frac{k}{e^k}\right)$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} e^k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{e^k}\right) \quad (\infty/0)^B$$

$$\underbrace{\infty}_{1} \cdot \left[\lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{e^k} \right] = \infty \cdot 1 = \infty$$

$$1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e^k} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$$

Limit Mukayese testi (Bölüm testi)

28

$\sum a_k$ ve $\sum b_k$ terimleri negatif olmayan iki seri

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L \text{ olsun.}$$

1) $L \neq 0, \infty$ dan farklı bir sayı ise a_k ile b_k aynı karakterdedir.

2) $L = 0$ ve b_k serisi yakınsak ise a_k serisinde yakınsaktır.

3) $L = \infty$ ve b_k serisi ıraksak ise a_k serisinde ıraksaktır.

ÖR / $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ alalım.}$$

p serisi ıraksak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \neq 0, \infty$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ıraksak Dolayısıyla}$$

$$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} \text{ de ıraksaktır.}$$

ÖR / $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz. 29

$$\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \text{ aldım. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ serisi yakınsak}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1 \neq 0, \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisinde yakınsaktır.

ÖR / $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \frac{1}{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$b_n = \frac{1}{n^3}$ serisini seçelim. p serisi $p=3 > 1$ yakınsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^3}{\frac{1}{n^3}}$$

Not:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\frac{1}{x} = t$$

$$x \rightarrow \infty \quad t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^3$$

$$= 1 \neq 0, \infty$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ serisi yakınsak

olduğundan $\sum \sin^3 \frac{1}{n}$ de yakınsaktır.

D'Alembert oran testi

30

Bütün terimleri pozitif olan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisini gözönüne alalım.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$ olsun. $L < 1$ ise seri yakınsak
 $L > 1$ " " " iraksak
 $L = 1$ ise birşey söylenemez.

ÖR / $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

yakınsak

ÖR / $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(10)^{n-1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{10^n}}{\frac{(n-1)!}{10^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{10^n} \cdot \frac{10^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n \cdot 10^{-1}}{(n-1)!}$$

ÖR / $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{10} = \infty > 1$$

iraksak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!} (n+1) \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$= e > 1$$

iraksak

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n-1}$$

$$a = \frac{1}{e^2} \quad r = \frac{1}{e^2} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$S = \frac{\frac{1}{e^2}}{1 - \frac{1}{e^2}}$$

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$$

$$n^{4/3} \cdot n^{-5/3} = n^{-1/3} = \frac{1}{n^{1/3}}$$

$$b_n = \frac{1}{n^{1/3}} \text{ seçelim.}$$

Limit mukayese testi (Bölim Testinden)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}} \cdot n^{1/3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/3} + n^{5/3}}{2+n^{5/3}} = 1 \neq 0, \infty \end{aligned}$$

olduğu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$$

serisi iraksak

p serisi

$p = \frac{1}{3} < 1$ iraksak

Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}} \text{ de iraksak}$$

ÖR / $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{dx}{(1+x)^2} \right)$ serisinin toplamını bulunuz.

32

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{1+x} \Big|_k^{k+1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{1+k+1} + \frac{1}{1+k} \right]$$

$$\text{Teleskopik Seri} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1$$

ÖR / $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$n < e^n \Rightarrow \ln n < n \quad (n \geq 1)$$

$$\frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{n2^n} = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \frac{1}{2^n} \quad a_n < b_n$$

$$b_n = \sum \frac{1}{2^n} \text{ yakınsak (Geo Seri)}$$

Mukayese testinden $\sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ de yakınsaktır.

Veya Bölüm testinden de yapılır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n} \cdot 2^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1} = 0 = L$$

$$\sum \frac{1}{2^n} \text{ yakınsak} \quad \sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n} \text{ de yakınsaktır.}$$

ör/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3ke^k}{2k^2+5k}$ serisinin karakterini belirleyiniz. 33

İraksaklık Testi ile;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3ke^k}{2k^2+5k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \cdot 3e^k}{(2k+5)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3e^k}{2k+5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3e^k}{2} = \infty$$

ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz. İraksak

Mukayese testinden;

$$3^n \leq 3^n + n \Rightarrow \frac{1}{3^n} \geq \frac{1}{3^n + n} \Rightarrow \frac{1}{3^n + n} \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

geo seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n} \text{ de yakınsak}$$

$r = \frac{1}{3} < 1$ yakınsak

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Mukayese testinden;

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} = \frac{1}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ serisi iraksak (harmonik seri)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ de iraksaktır.}$$

ör/ $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ serisi iraksaktır.

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ tek} \\ 1, & n \text{ çift} \end{cases}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mevcut değil. Seri iraksaktır.

ör/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(1+\ln k)^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz

34

$f(x) = \frac{2}{x(1+\ln x)^3}$ integral testi

$$\int_1^{\infty} \frac{2 dx}{x(1+\ln x)^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2 dx}{x(1+\ln x)^3}$$

$$1 + \ln x = u$$

$$\frac{dx}{x} = du$$

$$\int \frac{2 du}{u^3} = 2 \int u^{-3} du$$

$$= \frac{2 u^{-2}}{-2}$$

$$= -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(1+\ln x)^2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{(1+\ln x)^2} \right|_1^b$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(1+\ln b)^2} + \frac{1}{(1+\ln 1)^2} \right]$$

$$= \frac{-1}{(1+\ln \infty)^2} + 1 = 1$$

seri yakınsak

ör/ $x = 0,323232\dots = 0,\overline{32} = \frac{32}{99}$ olduğunu geometrik seri ile gösteriniz.

$$x = 0,32 + 0,0032 + 0,000032 + \dots$$

$$= \frac{32}{10^2} + \frac{32}{10^4} + \frac{32}{10^6} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 32 \cdot \frac{1}{100} \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

$$a = 32/100 \quad r = \frac{1}{100} < 1$$

$$S = \frac{32/100}{1 - 1/100} = \frac{32}{99}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ serisinin karakterini belirle.

35

Cauchy - Kök testi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} \right]^{1/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^3 \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n (1^\infty)^B$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^3 \cdot \left(\frac{1}{\frac{n+2}{n}}\right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{n \rightarrow \infty} e^3 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n}}\right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a = e^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n}}\right)^n = \frac{e^3}{e^2} = e > 1$$

Kök testine göre ıraksak.

ÖR/ $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} (1^\infty)^B$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+1}} \right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \right]^{\frac{n-1}{n+1}}$$

$$= (e^{-2})^1 = \frac{1}{e^2} < 1 \text{ seri yakınsak}$$

$$\frac{n-1}{-n+1} \bigg| \frac{n+1}{1}$$

-2

ÖR/

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

serisinin

karakterini belirleyiniz.

36

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$$

D'Alembert oran testi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2}{2^n} \cdot \frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad 1^\infty \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

olup $\sum a_n$ serisi yakınsak

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) (2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$$

$$= \frac{3}{2} > 1 \quad \text{seri iraksaktır.}$$

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{\frac{n^3+1}{2n^2+3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4^{\frac{n^3+1}{2n^2+3}} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{\frac{n^3+1}{2n^3+3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{1/2}$$

$$= 2 > 1$$

olup seri iraksak

ÖR / $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{1+5n^2}$ serisinin karakterini belirleyiniz. 37

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{1+5n^2} = \frac{1}{5} \neq 0 \text{ seri iraksak (iraksaklık testi)}$$

ÖR / $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{n} \cdot (\sqrt{2n-1} + \sqrt{n})}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1-n}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \frac{1}{n})}{\sqrt{n(2 - \frac{1}{n})} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \frac{1}{n})}{\sqrt{n} \left[\sqrt{2 - \frac{1}{n}} + 1 \right]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\rightarrow 0}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \infty$$

$$= \frac{\infty}{\sqrt{2} + 1} = \infty$$

seri iraksak

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5}{4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad a=5$$

$$r = -\frac{1}{4} < 1$$

$$S = \frac{5}{1 - (-\frac{1}{4})} = \frac{5}{5/4} = 4$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$a=1$$

$$r = \frac{1}{2} < 1$$

Yakınsak

$$a=1$$

$$r = \frac{1}{6} < 1$$

Yakınsak

$$S = \frac{1}{1 - 1/2} - \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{1}{1/2} - \frac{1}{5/6}$$

$$= 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ Serisinin toplamını bulunuz.

39
2

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$

ör/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ toplamını bulunuz.

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -1 \quad C = \frac{1}{2}$$

$$(k+2)(k+1) \quad k(k+2) \quad k(k+1)$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) \right] + \dots + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Terimleri , sırasıyla bir pozitif ve bir negatif (veya bir negatif ve bir pozitif) olan seriye bir alternan seri denir.

Genel bir alternan seri , her $k=1,2,3,\dots$ için $a_k > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \dots \mp (-1)^{k+1} a_k \pm \dots$$

şeklinde dir. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ şeklinde de olabilir.

ÖR/ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$

ÖR/ $-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \dots$

Teorem; Alternan Seri Testi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ bir alternan seri olsun.}$$

Eğer aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa seri yakınsaktır.

1) $\forall k$ için a_k pozitif olmalı.

2) $\forall k$ için $a_k \geq a_{k+1}$

(yani serinin her terimi mutlak değerce azalıyor)

3) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

ÖR / $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1}$ serisini gözönüne alalım.

41

1) $k=1, 2, \dots$ için $a_k = \frac{1}{k^2+1}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{5}$ a_k nin tüm terimleri pozitif

2) Her k için

$$\frac{1}{(k+1)^2+1} < \frac{1}{k^2+1} \text{ yani } a_{k+1} < a_k \text{ dir.}$$

3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2+1} = 0$ dir.

Seri yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklık

42

Değişken işaretli

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \text{ serisinde, eğer } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

serisi yakınsak ise serinin mutlak yakınsak olduğu söylenir.

Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır.

Şarta bağlı yakınsaklık

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ serisi ıraksak fakat}$$

alterne seri testi ile yakınsak çıkarsa bu seriye şarta bağlı yakınsak seri denir. Alterne seri testi söylenmazsa seri ıraksak olur.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad p=2 > 1 \text{ seri yakınsak}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \text{ serisi mutlak yakınsak seridir.}$$

ÖR/ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \left(-\frac{2}{3}\right)^k \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{geo seri } r = \frac{2}{3} < 1 \text{ seri yakınsak}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k \text{ serisi mutlak yakınsak seridir.}$$

ör/ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ serisini gözönüne alalım. 43

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ harmonik seri}$$

ıraksak

Alterne testi uygulayalım.

1) Her n için $a_k = \frac{1}{k}$ pozitif terimli

2) $a_k > a_{k+1}$ dir. $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$

3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ dir.

Alterne seri testi sağlandığından

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \text{ serisi şartta bağlı yakınsak seridir.}$$

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+\cos n}{n^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1+\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2} \text{ bu serinin karakterini belirle.}$$

$$\forall n \text{ için } -1 \leq \cos n \leq 1$$

$$0 \leq \cos n + 1 \leq 2$$

$$\frac{0}{n^2} \leq \frac{\cos n + 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} \text{ Mukayese (Karşılaştırma) testi}$$

$$\frac{1+\cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

$$a_n \leq b_n$$

$b_n = \sum \frac{2}{n^2}$ serisi $p=2 > 1$ yakınsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ de yakınsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+\cos n}{n^2} \text{ serisi mutlak yakınsak seridir.}$$

Tanım: $x=0$ civarındaki bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

biçimindeki bir seri olarak tanımlanır.

$x=x_0$ civarındaki bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots$$

şeklindeki seriye kuvvet serisi denir.

Burada x_0 serinin merkezi $a_0, a_1, \dots, a_n$ serinin katsayılarıdır. Böyle bir seri, x değişkeninin alacağı değerlere göre yakınsak veya ıraksak olabilir.

- 1) Seri sadece $x=x_0$ dayakınsak olabilir.
- 2) Seri, her x reel sayısı için yakınsak olabilir.
- 3) Seri, bir aralık (açık, kapalı veya yarı-açık) içinde yakınsak olabilir.

Seriye yakınsak yapan x değerlerinin oluşturduğu aralığa yakınsaklık aralığı denir. Yakınsaklık aralığı oran testinin uygulanması ile bulunur.

Eğer $u_n = a_n (x-x_0)^n$ dersek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-x_0| \text{ olup}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ almakla}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R |x - x_0| \text{ bulunur.}$$

45

0 halde serinin yakınsak olabilmesi için

$$R |x - x_0| < 1 \text{ olmalıdır. } |x - x_0| < \frac{1}{R}$$

$$x_0 - \frac{1}{R} < x < x_0 + \frac{1}{R} \text{ elde ederiz.}$$

$(x_0 - \frac{1}{R}, x_0 + \frac{1}{R})$ serinin yakınsaklık aralığıdır. $\frac{1}{R}$ sayısına da yakınsaklık yarıçapı denir.

OR / $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_0 |x| < 1$$

Bu seri bütün x değerleri için yakınsaktır.

OR / $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{n+1}_{\infty} |x|$$

$x=0$ hariçindeki bütün değerlerde ıraksak

$x=0$ da yakınsaktır.

OR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ serinin yakınsaklık aralığını bul ve noktalar da seriyi incele 46

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x-2)^n}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x-2)^n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n^2}{(n+1)^2}}_1 \cdot |x-2| = |x-2| < 1 \text{ olmalı}$$

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1$$

$$1 < x < 3 \text{ Yakınsaklık aralığı}$$

$x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ alterne seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ yakınsak} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ mutlak yakınsak}$$

$x=3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ serisi yakınsak}$$

$$-1 \leq x \leq 3 \text{ yakınsaklık aralığı}$$

ÖR $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n^2}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. 47

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)^2}}{\frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n^2}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^n \cdot (x+1) \cdot 2^n \cdot n^2}{2^n \cdot 2 \cdot (n+1)^2 \cdot (x+1)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} \right)^2}_1 \cdot \left| \frac{x+1}{2} \right| \Rightarrow \left| \frac{x+1}{2} \right| < 1 \end{aligned}$$

$$|x+1| < 2$$

$$-2 < x+1 < 2$$

$$-3 < x < 1 \quad \text{Y.A}$$

Bu aralıktaki her reel sayı için seri yakınsaktır.
Uçları inceleyelim.

$x = -3$ için x yerine -3 koyalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \cdot 2^n}{2^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$p=2 > 1$ seri yakınsak

$x=1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{yakınsak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{mutlak yakınsak}$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

ÖR / $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^n+1}$ serisinin hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartı bağıli yakınsak ve ıraksak olduğunu inceleyelimiz. 48

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{e^{n+1}+1} \cdot \frac{e^n+1}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n+1}{e^{n+1}+1} \cdot |x| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n (1 + \frac{1}{e^n})}{e^n (e + \frac{1}{e^n})} |x| \\ &= \frac{|x|}{e} < 1 \Rightarrow |x| < e \\ &\quad -e < x < e \end{aligned}$$

yakınsaklık analizi

Uç noktalarda seriyi inceleyelim.

$x=e$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+1}$ serisinin karakterini belirle

İraksaklık Testi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n (1 + \frac{1}{e^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^n}} = 1 \neq 0$
ıraksak

$x=-e$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e)^n}{e^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{e^n+1}$

serinin mutlak değerlerindeki oluşan kısmı

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+1}$ ıraksak

Alternan seri testinden 3 koşul

Seçilen modifinden yani $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ dir.

seri ıraksak

Yakınsaklık analizi $-e < x < e$ dir.

ÖR/ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{4^k (k+1)^2}$ serisinin yakınsaklık analizini bulunuz. 49
 Uç noktalarda seriyi inceleyiniz.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{4^{k+1} (k+2)^2}}{\frac{x^k}{4^k (k+1)^2}} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^k \cdot x}{4^k \cdot 4 (k+2)^2} \cdot \frac{4^k (k+1)^2}{x^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{4} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}}_{\frac{1}{4}} \cdot |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} |x| < 1$$

$$|x| < 4$$

$$-4 < x < 4$$

Yakınsaklık analizi

Uç noktalarda seriyi inceleyelim.

$x = -4$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{4^k (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cancel{4^k}}{\cancel{4^k} (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \text{ serisinin karakterini belirle}$$

D'Alembert oran testi ile

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+2)^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = 1$$

test cevap vermiyor.

Şimdi Mukayese testi ile yapalım

$$k \geq 1 \Rightarrow k < k+1 \Rightarrow k^2 < (k+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k^2} \text{ dir.}$$

Mukayese testinden; $\left[\sum \frac{1}{k^2} \right]$ serisi $p=2 > 1$ olduğundan yakınsaktır.]

Dolayısıyla ondan daha küçük olan $\sum \frac{1}{(k+1)^2}$ de

yakınsaktır. $\sum \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ mutlak yakınsak seridir.

$x=4$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{4^k (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{nm yakınsak olduğunu mukayese testi ile gösterdik}$$

$-4 \leq x \leq 4$ yakınsaklık analizi

ör/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 - k + 3}{2k^2 - 6}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 - k + 3}{2k^2 - 6} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{seri ıraksak}$$

İraksaklık testi (n. term testi)

Eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ (veya ∞) ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

serisi ıraksaktır.

ör/ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\sqrt{k}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$$

$$p = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{ıraksak}$$

Alterne seri testi

1) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$

2) $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Rightarrow a_k > a_{k+1}$$

olması nedeniyle

Seri çözümlü yakınsak seridir.

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!+1}$

mutlak yakınsak mı, şartta başka yakınsak mı?

51

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!+1} \text{ karakterini belirle}$$

D'Alebert oran testi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!+1} \cdot \frac{n!+1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n!+1}{(n+1)!+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!+1} \cdot \frac{n!+1}{2^n}$$

pay ve payda n! ile

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\frac{n!}{n!} + \frac{1}{n!}}{\frac{(n+1)!}{n!} + \frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{n!} \rightarrow 0}{n+1 + \frac{1}{n!} \rightarrow 0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

yakınsak dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!+1} \text{ serisi mutlak yakınsak}$$

ÖR/ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot (x-2)^k}{3^k}$

hangi x değerleri için yakınsaktır?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)! \cdot (x-2)^{k+1}}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k! \cdot (x-2)^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{3} \cdot |x-2|$$

$$= \infty > 1$$

$x \neq 2$ için seri ıraksak

$x = 2$ de sadece seri yakınsaktır.

ÖR/ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^{n+1}} + \frac{\cos n\pi}{3^{n+2}} \right) = ?$

52

Geo Seriyi hatırla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots$$

$|r| < 1 \Rightarrow$ yakınsak

$$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n \cdot 2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot 9} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{5}{2}}_a \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_r + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{9}}_a \underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)^n}_r \\ &= \frac{5/2}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1/9}{1 - (-\frac{1}{3})} = 5 + \frac{1}{12} = \frac{61}{12} \end{aligned}$$

ÖR/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = ?$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{\underbrace{(n+1)!}_{n!(n+1)}} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Önce düzenledim.
Teleskopik seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = ?$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \dots + \frac{1}{\cancel{(n-1)!}} - \frac{1}{\cancel{n!}} + \frac{1}{\cancel{n!}} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 \quad \text{Toplam}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad \text{seri yakınsak ise}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow \begin{cases} |r| < 1 & \text{yakınsak} \\ |r| \geq 1 & \text{ıraksak} \end{cases}$$

Eğer bir f fonksiyonunu $f; (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ şeklinde tanımlarsak yukarıdaki

seride $r = x$ olacak.

$$|x| < 1 \text{ olmak üzere } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x) \text{ yazarız.}$$

Dolayısıyla bir f fonksiyonunu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ kuvvet
 serisi ile temsil edebiliriz.

OR/ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ bu fonksiyonu temsil eden
 kuvvet serisini belirleyiniz.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$| -x^2 | < 1 \Rightarrow \underbrace{x^2 < 1}_{\text{karekök aldım.}} \Rightarrow |x| < 1$$

ÖR/ $f(x) = \frac{1}{3+2x}$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini belirleyiniz. 54

$$|x| < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ idi}$$

$$f(x) = \frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3(1+\frac{2}{3}x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2}{3}x)}$$

$$\left| -\frac{2}{3}x \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{2}{3}x \right| < 1 \quad \begin{array}{l} |2x| < 3 \\ -3 < 2x < 3 \\ -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ veya } |x| < \frac{3}{2} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}x \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x)^n}{3^{n+1}}$$

Kuvvet Serilerinin türevi ve integrali

Teorem; Eğer x_0 bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \dots \text{ serisi}$$

$\left(x_0 - \frac{1}{R}, x_0 + \frac{1}{R} \right)$ de yakınsak ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [a_n (x-x_0)^n] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \text{ serisi de}$$

$\left(x_0 - \frac{1}{R}, x_0 + \frac{1}{R} \right)$ de yakınsaktır.

ÖR/ $f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$ fonk temsil eden kuvvet serisini bul.

$$\frac{-1}{x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right), \quad -\left(\frac{1}{(1+x)^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x} \right), \quad \frac{-1}{(2+x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2+x} \right) \text{ ise}$$

$$\left(\frac{1}{2+x} \right)^2 = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2+x} \right) \text{ seriye açalım.}$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{1-(-x-1)}$$

$$|-x-1| < 1$$

$$|x+1| < 1$$

$$-1 < x+1 < 1$$

$$-2 < x < 0$$

$$\frac{1}{1-(-x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2+x)^2} &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2+x} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[(-1)^n (x+1)^n \right] \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n (x+1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n (x+1)^{n-1} \end{aligned}$$

Teorem; Eğer f , $\forall x \in (x_0 - \frac{1}{R}, x_0 + \frac{1}{R})$ için yakınsak bir seri temsiline sahip ise, yani

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ ise her iki tarafı integre}$$

edersek

$$F(x) = \int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \text{ serisi de}$$

$(x_0 - \frac{1}{R}, x_0 + \frac{1}{R})$ de yakınsaktır.

ör/ $\ln(1+x^2)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini bulunuz.

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad |x| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \end{aligned}$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x \cdot (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2 \cdot x^{2n+1}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2 \cdot x^{2n+1}$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot x^{2n+2}}{2n+2} + c \quad |x| < 1$$

c yi yok edelim: $2(n+1)$

$$x=0$$

$$\ln(1+0) = 0 + c \quad c=0$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{n+1} \quad |x| < 1$$

$\hat{O}R/$ $f(x) = \arctan x$ fonk kuvvet serisi açılımını bulunuz

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan x \Big|_0^x = \arctan x$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$

ÖR / $f(x) = \cos(2x^3)$ fonk seri gösterimini bulunuz. 57

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots$$

$$\begin{aligned}\cos(2x^3) &= 1 - \frac{(2x^3)^2}{2!} + \frac{(2x^3)^4}{4!} - \dots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!} x^6 + \frac{2^4}{4!} x^{12} - \dots\end{aligned}$$

$$\cos(2x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{6n}$$

ÖR / $f(x) = x e^{-2x}$ fonk seri gösterimini bulunuz.

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-2x} = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{(-2x)^2}{2!} + \dots + \frac{(-2x)^n}{n!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \dots + \frac{(-2)^n x^n}{n!} + \dots$$

$$x e^{-2x} = x - \frac{2x^2}{1!} + \frac{4x^3}{2!} + \dots + \frac{(-2)^n x^{n+1}}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^{n+1}$$

OR/

58

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^{2t} - 1}{t^2} dt = ?$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

$$e^{2t} = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{6} + \dots$$

$$e^{2t} - 1 = \cancel{1} + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \dots \quad \cancel{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^{2t} - 1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3}{t^2} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \left(\frac{2}{t} + 2 + \frac{4}{3}t + \dots \right) dt$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \ln t + 2t + \frac{4}{3} \frac{t^2}{2} + \dots \right]_x^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \ln 2x + \underbrace{4x}_0 + \frac{2 \cdot 4x^2}{3} - 2 \ln x - \underbrace{2x}_0 - \frac{2}{3}x^2 - \dots \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \left[\ln 2 + \ln x \right] - 2 \ln x = 2 \ln 2$$

$\ln 2x$ böylelikle yazdım

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k+1}} = \frac{9}{4} \text{ olduğunu gösteriniz}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad |x| < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \quad |x| < 1$$

$$\frac{2x}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-1} \quad |x| < 1$$

$x = \frac{1}{3}$ alalım. n den k ya geçmek için n 'ye öyle bir değer verelim. $k=0$ olsun.

$$\begin{matrix} n = k+2 \\ \downarrow \\ 2 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} n = k+2 \\ \downarrow \\ 2 \end{matrix}} \right\} k=0$$

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

$$\frac{9}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k+1}}$$

ÖR/ $\ln(1+x)$ fonksiyonunun kuvvet serisini açılımını bu

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^n &= \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-(-t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \\ &= 1 - t + t^2 - t^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad -1 < x < 1$$

Taylor Serisi

60

Bir f fonksiyonu bir x_0 noktasını içeren aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$x = x_0$ noktasında Taylor serisi

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \text{ şeklindedir}$$

$x_0 = 0$ ise

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ Mac laurin serisi olur.}$$

ör/ $f(x) = \frac{1}{x}$ tarafından $x_0 = 2$ noktasında üretilen Taylor serisini bulunuz. Bulduğunuz bu seri hangi aralıkta $\frac{1}{x}$ 'e yakınsar? ($\frac{1}{x}$ 'e eşittir)

$$f(2) + \frac{f'(2)}{1!} (x-2) + \frac{f''(2)}{2!} (x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!} (x-2)^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f''(2) = \frac{2}{2^3}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \quad f'''(2) = \frac{-6}{2^4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} (x-2) + \frac{2}{2^3} \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{6}{2^4} \frac{(x-2)^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n + \dots$$

genel terimi nedir?

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} (x-2) + \frac{1}{2^3} (x-2)^2 - \frac{1}{2^4} (x-2)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 - \frac{1}{2^3}(x-2)^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2} \right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{1}{x}$$

$0 < x < 4$ için $\frac{1}{x}$ 'e yakınsar.

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\left| -\frac{x-2}{2} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x-2}{2} \right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2$$

$$-2 < x-2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

Taylor polinomu:

$x = x_0$ noktasında üretilen n 'inci mertebeden Taylor

polinomu

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

dir.

ör/ $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x=0$ da üretilen Taylor Serisini ve polinomunu bulunuz.

$x=0$ Maclaurin Serisi

$$f(x) = e^x \quad f(0) = 1$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ Taylor serisi}$$

Bu aynı zamanda e^x için Maclaurin serisidir.

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad x=0 \text{ da üretilen}$$

Taylor polinomu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}} \Rightarrow |x| < \infty$$

Sık kullanılan Taylor serileri

62

$$1) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$2) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$3) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ÖR/ $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ integralinin 0,001 den küçük bir hata payı ile yaklaşık bir değeri bulunuz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \right] dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \dots \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \dots$$

birde bir hata
burada
kesiyorsunuz.

OR/ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ limitni serilerden yararlanarak 63 gördünüz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{3!} \right) = 0$$

OR/ $f(x) = e^{x^2} - e^{-x^2}$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ limitni seriler yardımıyla belirleyiniz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right) - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2 \cdot \frac{x^6}{3!}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(2 + \frac{2x^4}{3!} + \dots \right)}{x^2}$$

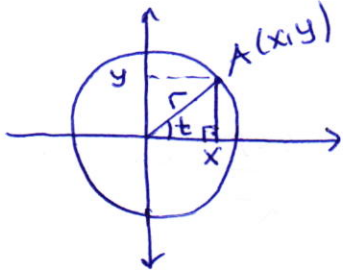
$$= 2$$

Parametrik denklemler;

Eğer x ve y ; t değerlerinin I aralığında $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise, o zaman bu denklemlerle tanımlanan

$(x,y) = (f(t), g(t))$ noktaları kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere, eğri için parametrik denklemler denir.

ör $x^2 + y^2 = r^2$ yarıçapı r , merkezi $M(0,0)$ olan çembeldir.

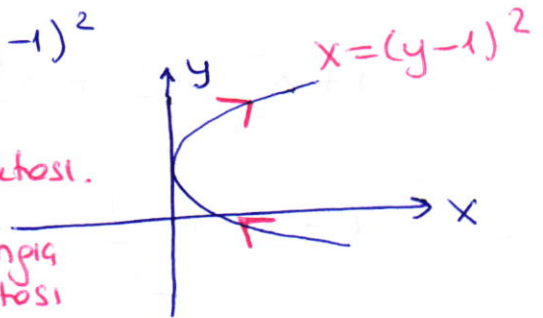


$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos t \\ \sin t &= \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin t \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{çemberin} \\ \text{parametrik denklemleridir.} \end{array}$$

ör $x=t^2$ $y=t+1$ $-\infty < x < \infty$ eğrisinin denklemini x ve y cinsinden bulup çizelim.

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t+1 \\ y-1 &= t \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x = (y-1)^2$$

$$\begin{aligned} t \rightarrow \infty & \quad x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow \infty & \text{bitiş noktası.} \\ t \rightarrow -\infty & \quad x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow -\infty & \text{başlangıç noktası} \end{aligned}$$



ör/ $x=1+2\cos t$ $y=2\sin t$ parametrisasyonu ile verilen eğriyi bulunuz.

$$\begin{aligned} x &= 1+2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{x-1}{2} \\ \sin t &= y/2 \end{aligned}$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ çemberi bulunur.}$$

Türev: f ve g fonksiyonları t de türevlenebilir 65

İse $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ de türevlenebilir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

ÖR/ $x=\sec t$, $y=\tan t$ $-\pi/2 < t < \pi/2$ eğrisinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} \sec t = \sqrt{2} \\ \tan t = 1 \end{array} \right\} t = \pi/4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec \pi/4}{\tan \pi/4} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}x - 1 \end{aligned}$$

Parametrik olarak tanımlı eğrinin uzunluğu:

Eğer C eğrisi $x=f(t)$, $y=g(t)$ $a \leq t \leq b$ ile parametrik olarak tanımlıysa $t=a$ dan $t=b$ ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiyorsa C nin uzunluğu

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \text{ dir.}$$

ÖR/ $x=r \cos t$ $y=r \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$ çemberinin uzunluğu?

$$f'(t) = -r \sin t \quad g'(t) = r \cos t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = r t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

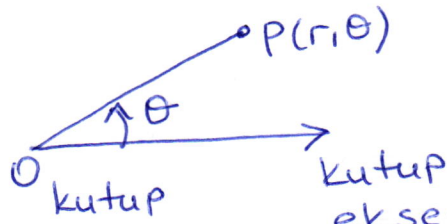
ÖR / $x = t - t^2$ $y = t - t^3$ $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulunuz 66

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-6t(1-2t) + 2(1-3t^2)}{(1-2t)^2} = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3}$$

Kutupsal Koordinatlar

Genelde bir nokta (r, θ) kutupsal koordinatları cinsinden verilmişse o; kutuptan eğer $r \geq 0$ ise θ ışını boyunca ve eğer $r < 0$ ise $\pi + \theta$ ışını boyunca $|r|$ uzaklıkta bulunur.



Düzlem üzerinde bir nokta ve bu noktan çıkan bir ışın seğıelim. Noktaya kutup, ışına ise kutup eksenini derir. Burada r , P'nin orjine uzaklığı θ da kutup eksenini ile OP arasındaki yönlü açıdır.

Pozitif θ : Saatin tersi yönü
Negatif θ : Saat yönü olarak alınır.

* Her k tam sayı için $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$ dir.

* Bir noktayı temsil eden sonsuz nokta vardır.

* Eğer $r = 0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.

* Eğer $r < 0$ ise P, θ açılı ışının ters yönünde $\theta + \pi$ açılı ışın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzunluktadır. $(r, \pi + \theta) = (-r, \theta)$ dir.

