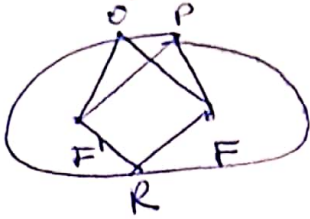


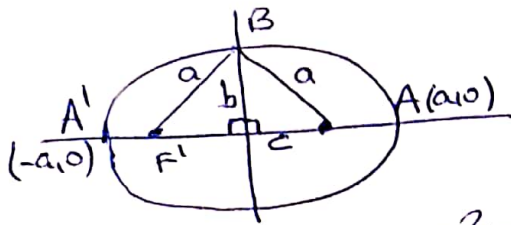
Elips



ipin uzunluğu l ise

$$|PF| + |PF'| = |QF| + |QF'| = |RF| + |RF'| = l$$

Tanım Düzlemde, sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların kümesine (geo. yer) elips denir. Sabit olan iki noktaya elips odakları denir.



$$|AA'| = 2a \text{ denirse}$$

$$|PF'| + |PF| = 2a$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a > b, a > c$$

A, A', B, B' noktalarına elipsin köşeleri
 $[AA']$ doğru parçasına asal eksen (büyük eksen)
 $[BB']$ " " yedek eksen (küçük eksen) denir.

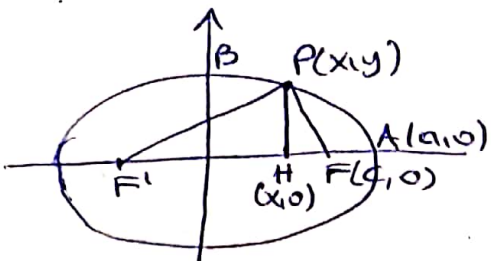
Bu eksenlerin kesim noktasında elipsin merkezi denir.

Merkezi $O(0,0)$ olan elipse merkezli elips denir.

$|AA'| = 2a$ sayısına Asal eksen uzunluğu

$|BB'| = 2b$ " yedek " "

$|FF'| = 2c$ " odaklar arası uzaklık denir.



Elipsini göz önüne alalım;

$$|PF| + |PF'| = 2a \text{ dir}$$

$\triangle PHF$ ve $\triangle PF'H$ üçgenlerinden.

E-2

$$|PF|^2 = |PH|^2 + |HF|^2 \quad \times$$

$$|PF'|^2 = |PH|^2 + |F'H|^2 \quad \times \times$$

$$|PF|^2 - |PF'|^2 = |HF|^2 - |HF'|^2 \Rightarrow$$

$$(|PF| + |PF'|)(|PF| - |PF'|) = |HF|^2 - |HF'|^2$$

$$2a(|PF| - |PF'|) = (c-x)^2 - (c+x)^2$$

$$|PF| - |PF'| = -\frac{2cx}{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} |PF| - |PF'| = -\frac{2cx}{a} \\ |PF| + |PF'| = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |PF| = a - \frac{c}{a}x \\ |PF'| = a + \frac{c}{a}x \end{array}$$

Δ
PF'H üçgeninden (xx) denk-

$$|PF'|^2 = |PH|^2 + |HF'|^2 \Rightarrow \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 = y^2 + (x+c)^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{elipsin standart denklemini}$$

örnek

Keseleri $A(8,0)$ $A'(-8,0)$ olan ve $P(4,3)$ nok. geçen elipsin denk bulun.

$$|AA'| = 2a \Rightarrow 16 = 2a \rightarrow a = 8 \quad \text{Elip öz-nokta seçilir.}$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bic. olur.} \rightarrow b^2 = 12$$

$$\frac{4^2}{64} + \frac{3^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow$$

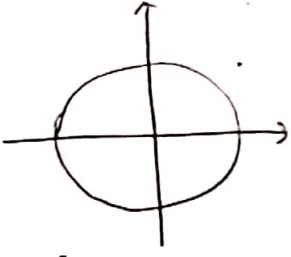
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsinin odaklarını ve odaklar arası uzunluğunu hesaplayın.

$$a^2 = 25, b^2 = 9 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

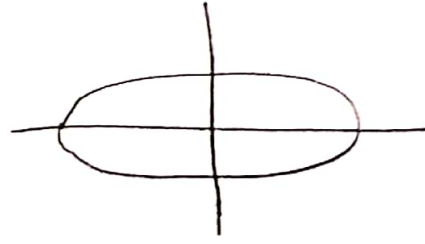
$$\therefore F(4,0), F'(-4,0)$$

$$|FF'| = 8 //$$

E-2' Elipsin Dış Merkezliği



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Sek. görüldüğü gibi elipslerin basıklık durumu farklıdır. 1. cembere yakın olduğu halde
2. elips daha basıktır.

Bir elipsin basıklık durumunu karakterize eden

$e = \frac{\text{odaklar arası uzaklık}}{\text{axel eksen, uzunluğu}}$ sayısına o elipsin dış merkez-

liği denir. $e = \frac{c}{a}$

Örnek

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ve $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ elip. dış merkez hesaplayın. hangisi daha basıktır.

$$1. c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \\ c = 3$$

$$e_1 = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

$$2. c^2 = 169 - 25 = 144 \\ c = 12$$

$$e_2 = \frac{12}{13}$$

$$e_1 < e_2$$

olup. 2. daha basıktır.



$$e=0$$



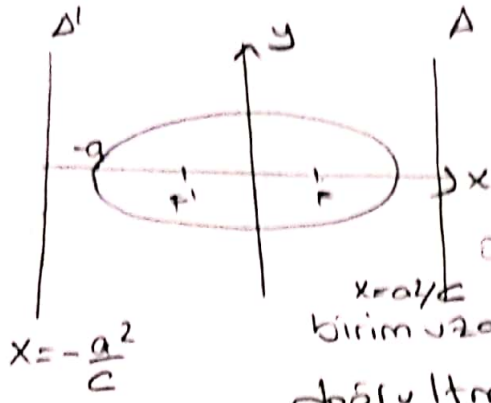
$$e=0.75$$



$$e=0.95$$

Dış merkezlik büyüdükçe elips daha basık hale gelmektedir.

Elipsin Doğrultmanı E_3'



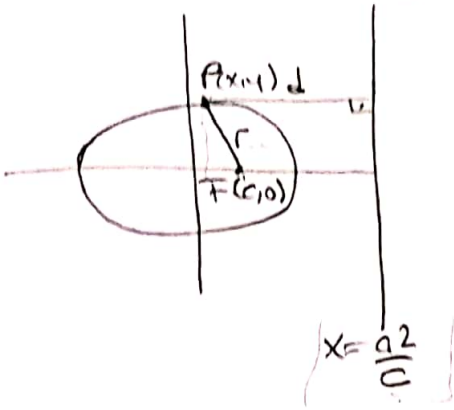
odakları ox -ekseni üzerinde olan merkezli elipsi gözönüne alalım.

odaklar eksenine dik ve merkezden $\frac{a^2}{c}$ birim uzakta bulunan Δ ve Δ' doğrularına elipsin doğrultmanlarıdır.

Δ doğrusu F odakına ait doğrultman

Δ' " F' " " "

Δ Teo: Elips üzerindeki herhangi bir noktanın bir odakta ve bu odakta ait doğrultmana olan uzaklıkları, oranı sabit olup elipsin dış merkezliğine eşittir. Dolayısıyla 1'den büyüktür.



$$\frac{r}{d} = \frac{c}{a} < 1$$

$$|PF| = a - \frac{cx}{a} = r$$

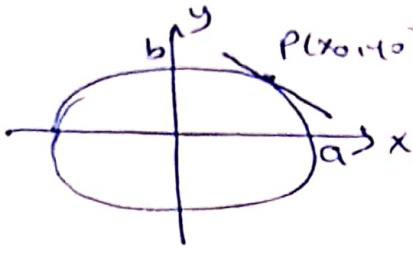
$$d = \frac{a^2}{c} - x$$

$$\frac{a^2 - cx}{c} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{r}{d} = e$$

E-3

Bir Elipse Üzerindeki bir noktadan Çizilen Tegetin denk.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

$$m = y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

olduğundan $m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

∴ T.D.
 $y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{denk. elde edilir.}$$

örnek

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad \text{elipsine } P(-3, -2) \text{ noktasındaki teget}$$

denk. bulun.

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{-3x}{18} + \frac{-2y}{8} = 1$$

$$2x + 3y + 6 = 0$$

Bir Elips ile Bir Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elipsi ile } y = mx + n \quad \text{doğrusunun}$$

ortak noktaları

$$\left. \begin{aligned} b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \\ y &= mx + n \end{aligned} \right\} \text{ sisteminin çözümleridir.}$$

E-4

$$(b^2 + a^2 m^2)x^2 + 2(mna^2)x + (a^2 n^2 - a^2 b^2) = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac$$

$$\Delta = a^2 b^2 (a^2 m^2 + b^2 - n^2)$$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ doğru elipsi kesmez

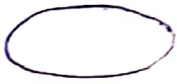
$\Delta = 0 \Rightarrow$ doğru ile elipsin bir ortak nok. vardır.
yani doğru elipse teğettir.

$\Delta > 0 \Rightarrow$ doğru elipsi 2 noktada keser.

$a^2 b^2 > 0$ old. Δ nın işareti $a^2 m^2 + b^2 - n^2$ ifadesinin işaretine bağlıdır.

1.

1.) $a^2 m^2 + b^2 < n^2 \Rightarrow$ doğru elipsi kesmez



2.) $a^2 m^2 + b^2 = n^2$ ise



3.) $a^2 m^2 + b^2 > n^2$

$\Delta = 0$ olduğunda $a^2 m^2 + b^2 = n^2$ olduğundan doğru nok. apsisı

$$x_0 = -\frac{B}{2A} = -\frac{2mna^2}{2(a^2 m^2 + b^2)} = -\frac{mna^2}{n^2} = -\frac{ma^2}{n}$$

$y = mx + n$ ifadesinde x in değeri yerine yaz?

$$y = m\left(-\frac{ma^2}{n}\right) + n = -\frac{m^2 a^2 + n^2}{n} = \frac{b^2}{n}$$

buna göre değme noktasının koordinatları

$$x_0 = -\frac{ma^2}{n}$$

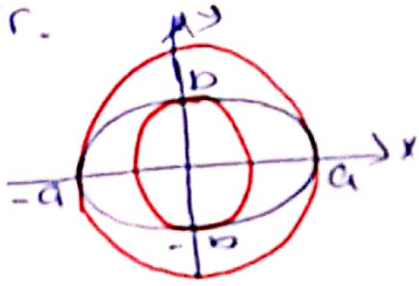
$$y_0 = \frac{b^2}{n}$$



Elipsin Çemberleri

Merkezi, elipsin merkezi, çapı asal eksen uzunluğu kadar olan çembere elipsin asal çemberi

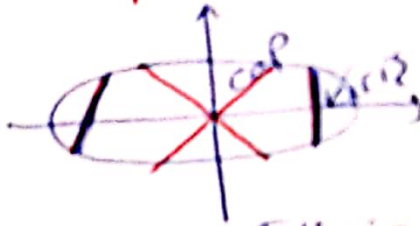
Merkezi, elipsin merkezi ve çapı yedek eksen uzunluğu kadar olan çembere elipsin yedek çemberi denir.



$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{Asal çem. denk.}$$

$$x^2 + y^2 = b^2 \quad \text{Yedek çem. denk.}$$

Elipslerin Kiriş ve Çapları



Elipsin ~~her~~ iki noktasını birleştiren her bir doğru parçasına elipsin bir kirişi denir.

Elipsin merkezine geçen her bir kirişine elipsin çapı denir. $\therefore$ Elipsin sonsuz çoklukta çapı ve kirişi vardır.

Teor: $y = mx$ ın doğrusu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsini kestiğinde, kesim noktalarını birleştiren kirişin uzunluğu

$$l = \frac{2ab}{a^2m^2 + b^2} \sqrt{(1+m^2)(a^2m^2 - b^4)} \quad \text{birimdir.}$$

E-6

ispat : Doğruye elipsin kesim noktalarının apsisi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0 \text{ denk.}$$

kökleridir. bu kökler x_1, x_2 olsun.

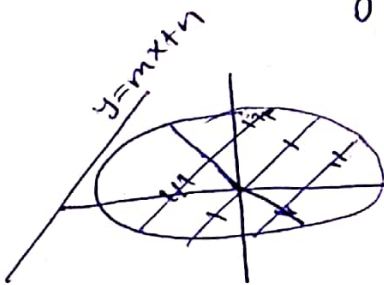
$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mn}{a^2m^2 + b^2} \quad 4x_1x_2 = \frac{4a^2(n^2 - b^2)}{a^2m^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= \frac{4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (mx_1 - mx_2)^2} \\ &= \frac{2ab}{a^2m^2 + b^2} \sqrt{(1+m^2)(a^2m^2 + b^2 - n^2)} \end{aligned}$$

Teo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin $y = mx + n$ doğrusuna paralel olan kirislerinin orta noktalarının geo. yeri

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x \text{ doğrusu (capi) dir.}$$



ispat $y = mx + n, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

kesim nok. apsisi:

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0 \text{ denk.}$$

kökleridir. x_1, x_2 olsun. d doğrusuna paralel

kirislerin orta noktalarının apsisi

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}, \quad y = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2m} \Rightarrow y = -\frac{b^2}{a^2m} x \text{ den elde edilir.}$$

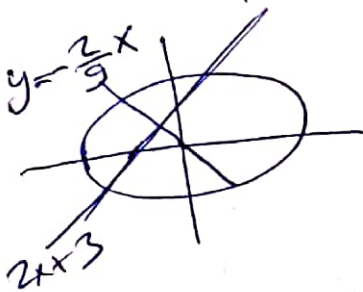
bu elipsin merkezinden geçen bir doğrudur.

$$m' = -\frac{b^2}{a^2m} \text{ derirse } m \cdot m' = -\frac{b^2}{a^2} \text{ bulunur. Binafore}$$

$y = mx$ ve $y = m'x$ doğrularından her biri, diğesine paralel olan kirişleri ortalar $y = mx$ ve $y = m'x$ doğrularına eşlenik doğrulardır.

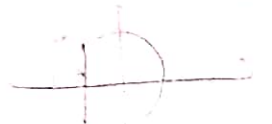
örnek $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin $y = 2x + 3$ doğ. paralel kirişlerinin orta noktalarının geo. yerini bulun.

$$\text{Cöz: } y = -\frac{b^2}{a^2m} x = -\frac{2}{9}x$$



Teorem: $A(x_0, y_0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin içinde bir nokta olsun. orta noktası (x_0, y_0) olan kirişin denklemini

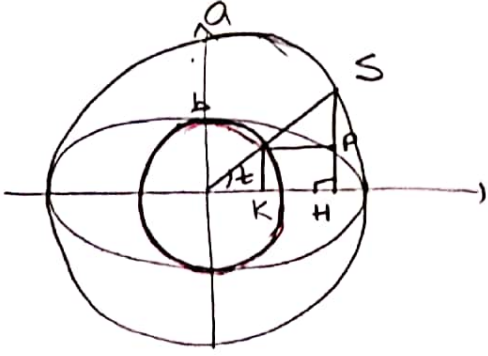
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$



örnek $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsine içindeki $S(1, 3)$ nok. geçen bir kiriş çiziliyor. S nok. kirişin orta nok. olduysa kirişin denklemini

$$\text{Cöz: } \frac{1 \cdot x}{36} + \frac{3 \cdot y}{16} = \frac{1^2}{36} + \frac{3^2}{16} \Rightarrow 4x + 27y = 85$$

Elipsin Parametrik Denklemleri



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi üzerinde bir $P(x, y)$ noktası alalım. P nok. asal eksenler çizilen dikmenin uzantısı asal çemberi S noktasında kessin.

$[OS]$ doğru parçası yedek çemberi T de kessin. T den S H a indirilen dikme P den geçesin. $\angle SOH = t$ ise

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Elipsin parametrik denk. dir.

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

ör Parametrik denk;

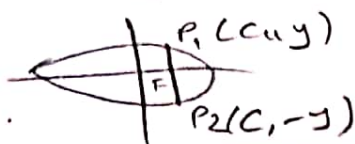
$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow a = 5, b = 3 \text{ olan elips.}$$

ör standart denklemi;

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ elipsinin parametrik denk.}$$

$$a = 4, b = 3, \quad \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

Elipsin Parametresi: Elipsin bir odakından asal ekseneye düşen bir noktanın uzaklığına elipsin parametresi denir. ve $2p$ ile gösterilir.



$$|PF_1| = 2p$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2)$$

$$y = \pm \frac{b^2}{a}, |PF_1| = 2p$$