

1. $z = \ln \sqrt{1+x^2+y^2}$ yüzeyinin $(1,1)$ noktasındaki teğet düzlemi? normal doğrusu?

$F: \ln \sqrt{1+x^2+y^2} - z = 0 \rightarrow \nabla F \rightarrow$ normale paralel
 \rightarrow Teğete dik

$$F_x = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{x}{1+x^2+y^2} \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad F_x(1,1) = \frac{1}{3}$$

$$F_y = \frac{\frac{2y}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{y}{1+x^2+y^2} \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad F_y(1,1) = \frac{1}{3}$$

$$F_z = -1 \quad \Rightarrow \quad \nabla F|_{(1,1)} = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1 \right\rangle$$

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \Rightarrow z = \ln \sqrt{3} \quad \begin{matrix} (1,1,\ln \sqrt{3}) \\ x_0 \ y_0 \ z_0 \end{matrix}$$

Teğet düzlem

$$\frac{1}{3} \cdot (x-1) + \frac{1}{3} (y-1) - (z - \ln \sqrt{3}) = 0$$

Normal Doğru

$$x = 1 + \frac{t}{3}$$

$$y = 1 + \frac{t}{3}$$

$$z = \ln \sqrt{3} - t$$

2. $z = \tan(x^2 - xy)$ yüzeyinin $(0,-1)$ noktasındaki teğet düzlemi?

$F: \tan(x^2 - xy) - z = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=-1 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad F_x = (2x-y) \cdot \sec^2(x^2 - xy) \rightarrow F_x = +1$

$\begin{matrix} x=0 \\ y=-1 \end{matrix} \Rightarrow z=0 \quad F_y = -x \cdot \sec^2(x^2 - xy) \rightarrow F_y = 0$

$F_z = -1 \rightarrow F_z = -1$

A B C

$$\nabla F|_{(0,-1)} = \langle +1, 0, -1 \rangle$$

$(0,-1)$

Nokta: $(0, -1, 0)$

$$x - z = 0$$

$$\Rightarrow x = z$$

Cevap A

3) $z = \sin(x+y^2)$ nin $(\pi, 0)$ daki normal doğrusu?

Teğet düzlemi?

$$x_0, y_0, z_0 \\ x = \pi, y = 0 \Rightarrow z = 0 \rightarrow \text{Nokta } (\pi, 0, 0)$$

$$F: \sin(x+y^2) - z = 0 \rightarrow \nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle \rightarrow \begin{array}{l} \text{Normale} \\ \text{paralel} \\ \rightarrow \text{Teğete dik} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = \cos(x+y^2) \rightarrow F_x(\pi, 0) = -1 \\ F_y = 2y \cos(x+y^2) \rightarrow F_y(\pi, 0) = 0 \\ F_z = -1 \end{array} \right\} \nabla F|_{(\pi, 0)} = \langle -1, 0, -1 \rangle \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}$$

$$\text{Teğet Düzlemi: } -1 \cdot (x - \pi) - 1 \cdot (z - 0) = 0 \Rightarrow x + z = \pi$$

$$\text{Normal Doğru: } x = \pi - t \quad y = 0 \quad z = -t$$

Cevap B

4) $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ $\Rightarrow f(2.2, -0.2)$ değerinin yaklaşık değeri? (Lineerleştirme veya dif. ile)

(2, 0) noktasında lineerleştirme yapalım. $x_0 = 2$ $y_0 = 0$

$$f(2, 0) = 3$$

$$F_x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}$$

$$F_x(2, 0) = \frac{4}{3}$$

$$F_y = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}$$

$$F_y(2, 0) = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} L(x, y) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(y-0) \\ F(x, y) \approx L(x, y) \Rightarrow f(2.2, -0.2) \approx L(2.2, -0.2) \end{array} \right\}$$

$$L(2.2, -0.2) = 3 + \frac{4}{3} \cdot (2.2 - 2) + \frac{1}{3} \cdot (-0.2)$$

$$= 3.2$$

Cevap C

5) $\sqrt{(2.06)^2 + 5 \cdot (0.97)^4}$ sayısının yaklaşık değeri-
ni lineerleştirme veya diğ. ile bulunuz.

- a) 2.90 b) 2.91 c) 2.92 d) 2.94

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y^4}$$

$$\begin{cases} a=2, & \Delta x = 0.06 \\ b=1, & \Delta y = -0.03 \end{cases}$$

$$f(2,1) = \sqrt{4+5} = 3$$

$$\begin{cases} f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5y^4}} \Big|_{(2,1)} = \frac{2}{3} \\ f_y = \frac{10y^3}{\sqrt{x^2 + 5y^4}} \Big|_{(2,1)} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Cevap D

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a,b) + f_x(a,b) \Delta x + f_y(a,b) \Delta y$$

$$\sqrt{(2.06)^2 + 5(0.97)^4} \approx 3 + \frac{2}{3}(0.06) + \frac{10}{3}(-0.03) = 2.94 //$$

6) Dikdörtgenler prizması şeklinde bir cismin kenarları 2cm, 3cm ve 4cm olarak verilmiştir. Bu cismin her bir boyutunda 0.02cm artış yapıldığında, cismin hacminde meydana gelen dV değişimi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{13}{1200}$
b) $\frac{26}{100}$
c) $\frac{52}{100}$
d) 48
e) $\frac{26}{1300}$

Prizmanın kenarları, x, y, z olsun.

$$V(x,y,z) = xyz \quad \text{olur.} \quad dx = dy = dz = 0.02$$

$$dV = V_x \cdot dx + V_y \cdot dy + V_z \cdot dz$$

$$\begin{array}{lll} V_x = yz & V_y = xz & V_z = xy \\ \downarrow y=3 & \downarrow x=2 & \downarrow x=2 \\ z=4 & z=4 & y=3 \end{array}$$

$$V_x = 12 \quad V_y = 8 \quad V_z = 6$$

$$dV = V_x \cdot dx + V_y \cdot dy + V_z \cdot dz = 12 \cdot 0.02 + 8 \cdot 0.02 + 6 \cdot 0.02$$

$$= 0.52 = \frac{52}{100}$$

Cevap C

7) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 2$ olmaksızın $(3, 2)$ noktasındaki

a) df toplam diferansiyeli?

b) $dx = 0,02$, $dy = -0,01$ ise $\left. \frac{df}{dx} \right|_{(3,2)} = ?$

a) $df = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$ ($x_0, y_0 = (3, 2)$)

$$f_x = 2x + 3y \rightarrow f_x(3, 2) = 6 + 6 = 12$$

$$f_y = 2y + 3x \rightarrow f_y(3, 2) = 4 + 9 = 13$$

$\boxed{df = 12dx + 13dy}$ $\rightarrow (3, 2)$ deki toplam dif.

b) $dx = 0,02$, $dy = -0,01$ ise

$$df = 12 \cdot \underbrace{dx}_{0,02} + 13 \cdot \underbrace{dy}_{-0,01} = 12 \cdot (0,02) + 13 \cdot (-0,01) = 0,24 - 0,13 = \boxed{0,11}$$

8) Silindir şeklinde bir cismin yarıçapı 2cm, yüksekliği 5 cm olarak verilmiştir. Bu cismin yarıçapı ve yüksekliği 0,02 cm azaltıldığında, cismin hacminde meydana gelen dV değişimi aşağıdakilerden hangisidir? $V = \pi r^2 h$

(a) $\frac{48}{100} \pi$

(b) $\frac{72}{100} \pi$

(c) $-\frac{48}{100} \pi$

(d) $-\frac{72}{100} \pi$

(e) $\frac{24}{100} \pi$

$$V(x, y) = f(x, y) = \pi x^2 y$$

$$dV = f_x(2, 5)dx + f_y(2, 5)dy$$

$$f_x = 2\pi xy \quad f_y = \pi x^2$$

$$f_x(2, 5) = 20\pi \quad f_y(2, 5) = 4\pi$$

$$dV = 20\pi \cdot (-0,02) + 4\pi \cdot (-0,02) = -0,48\pi = -\frac{48}{100} \pi$$

$$r = x$$

$$h = y$$

$$(x_0, y_0) = (2, 5)$$

$$dx = dy = -0,02$$

(0,02 azaltmış)

9) $f(x,y)$ için : $f(1,2)=5$ ve f in $(1,2)$ noktasındaki $\vec{i}+\vec{j}$ yönündeki türevi $3\sqrt{2}$ olsun. Buna göre $f(1.1, 2.1)$ sayısının yaklaşık değeri?

$$a=1, b=2$$

$$L(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$$

$$f(1.1, 2.1) \approx L(1.1, 2.1) = f(1,2) + f_x(1,2) \cdot 0.1 + f_y(1,2) \cdot 0.1$$

$$= 5 + 0.1 [f_x(1,2) + f_y(1,2)] *$$

$$* \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} \rightarrow \text{birim yapalım } \vec{v} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$(D_v f)_{(1,2)} = \nabla f|_{(1,2)} \cdot \left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} \right) = \langle f_x(1,2), f_y(1,2) \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (f_x(1,2) + f_y(1,2)) = 3\sqrt{2}$$

$$f_x(1,2) + f_y(1,2) = 6$$

$$* \text{ dan } f(1.1, 2.1) \approx 5 + (0.1) \cdot 6 = \underline{\underline{5.6}}$$

Cevap B)

10) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - yz$ fonksiyonunun $P(4,1,1)$ noktasındaki yönlü türevlerinin max değeri A, min değeri B ise A, B = ?

$$a) A=5$$

$$B=-5$$

$$b) A=\sqrt{27}$$

$$B=-\sqrt{27}$$

$$c) A=6$$

$$B=-6$$

$$d) A=\sqrt{10}$$

$$B=-\sqrt{10}$$

$$A = |\nabla f| \quad B = -|\nabla f| \text{ dir.}$$

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \left\langle \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} - z, -y \right\rangle$$

$$\nabla f|_P = \langle 1, -5, -1 \rangle$$

$$\rightarrow |\nabla f| = \sqrt{1 + (-5)^2 + 1} = \sqrt{27}$$

\Downarrow

$$A = \sqrt{27}$$

$$B = -\sqrt{27}$$

Cevap B)

11) $f(u,v)$ fonksiyonu, $f(4,2)=2020$, $f_u(4,2)=4$,
 $f_v(4,2)=2$ özelliklerini sağlayan bir fonk. olsun.

$$g(x,y,z) = f(\underbrace{y^2+zx}_u, \underbrace{2y-2z^2+3x}_v) \text{ ise } \nabla g|_{(0,2,1)} = ?$$

$$g = f \rightarrow u, v \rightarrow x, y, z$$

$$y^2 + zx = u$$

$$2y - 2z^2 + 3x = v$$

$$g(x,y,z) = f(u,v)$$

$$\nabla g = \langle g_x, g_y, g_z \rangle$$

$$g_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = f_u \cdot z + f_v \cdot 3 \Rightarrow g_x(0,2,1) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$g_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y = f_u \cdot 2y + f_v \cdot 2 \Rightarrow g_y(0,2,1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20$$

$$g_z = f_u \cdot u_z + f_v \cdot v_z = f_u \cdot x + f_v \cdot (-4z) \Rightarrow g_z(0,2,1) = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot 1 = -8$$

$$\nabla g(0,2,1) = \langle 10, 20, -8 \rangle$$

Cevap A

12) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ için hangisi doğrudur?

a) 1 Yerel min. vardır

b) 2 Yerel max. vardır

c) 1 Yerel max. vardır

d) 1 Eşen nok. vardır

$$\begin{cases} f_x = y - 2x - 2 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 2 \\ -2y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2 \Rightarrow (-2, -2) \rightarrow \text{kritik nokta}$$

$$A = f_{xx} = -2 \quad B = f_{xy} = 1 \quad C = f_{yy} = -2 \Rightarrow B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$A = -2 < 0$$

$(-2, -2)$ yerel max nokta

Cevap C

(13) $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 8$ fonk. max, min ve eger noktaları için hangisi doğrudur?

$f_x = 24x^2 - 12y = 0$ ① ①'den $y = 2x^2$ bulunur.
 $f_y = 3y^2 - 12x = 0$ ② ↓ ②'de yazalım

$3 \cdot 4x^4 - 12x = 0$
 $12x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0$
 $\rightarrow x = 1$

$x = 0 \xrightarrow{①} y = 0 \rightarrow \frac{K.N.}{(0,0)}$
 $x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow (1,2)$

$A = f_{xx} = 48x$ $B = f_{xy} = -12$ $C = f_{yy} = 6y$

	$A = 48x$	$B = -12$	$C = 6y$	$B^2 - AC$
$(0,0)$	0	-12	0	$(-12)^2 - 0 > 0 \Rightarrow (0,0)$ Eger N.
$(1,2)$	48	-12	12	$(-12)^2 - 12 \cdot 48 < 0$ $A = 48 > 0$

(1,2) yerel min. nokta

Cevap A

(14) $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$ fonksiyonunun yerel max sayısı a, yerel min sayısı b, eger noktası sayısı c ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

$f_x = 3x^2 - 3y = 0$ ① ①'den $3x^2 - 3y = 0 \rightarrow y = x^2$
 $f_y = 3y^2 - 3x = 0$ ② ↓ ②'de yazalım

$3x^4 - 3x = 0$
 $3x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$
 $\rightarrow \boxed{x = 1}$

$x = 0 \xrightarrow{①} y = 0 \rightarrow \frac{K.N.}{(0,0)}$
 $x = 1 \xrightarrow{②} y = 1 \rightarrow (1,1)$

$A = f_{xx} = 6x$ $B = f_{xy} = -3$ $C = f_{yy} = 6y$

	$A = 6x$	$B = -3$	$C = 6y$	$B^2 - AC$
$(0,0)$	0	-3	0	$9 > 0 \rightarrow (0,0)$ Eger N.
$(1,1)$	6	-3	6	$(-3)^2 - 6 \cdot 6 < 0$ $A = 6 > 0$

(1,1) yerel minimum nokta

Cevap C

15) $x^2 + y^2 + z^2 = 4y + 2z + 5$ yüzeyi ile $3x^2 + 2y^2 - 2z = 3$ yüzeyi $P(1, 2, 4)$ noktasında kesişiyorlar. Kesişim açısı?

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{3}$

Kesişim açısı
gradyanları
arasındaki
açıdır

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z - 5 \\ G(x, y, z) &= 3x^2 + 2y^2 - 2z - 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla F = \langle 2x, 2y - 4, 2z - 2 \rangle|_P = \langle 2, 0, 6 \rangle$$

$$\nabla G = \langle 6x, 4y, -2 \rangle|_P = \langle 6, 8, -2 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{\nabla F \cdot \nabla G}{|\nabla F| |\nabla G|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} //$$

Cevap C

16) $f(x, y) = x + y \sin x$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq \pi$ iken kaç kritik noktası, kaç ekstremum nok. vardır?

a) K.N: 3
E.N: 2

b) K.N: 2
E.N: 2

c) K.N: 2
E.N: 0

d) K.N: 2
E.N: 1

$$f_x = 1 + y \cos x = 0 \quad (1)$$

$$f_y = \sin x = 0 \quad (2) \rightarrow \begin{array}{cc} x=0 & x=\pi \\ \downarrow (1) & \downarrow (1) \\ \boxed{y=-1} & \boxed{y=1} \\ \downarrow & \downarrow \\ (0, -1) & (\pi, 1) \end{array}$$

$(0, -1)$ $(\pi, 1) \rightarrow$ Kritik noktalar \rightarrow 2 Tane K.N.

$$A = f_{xx} = -y \sin x \quad B = f_{xy} = \cos x \quad C = f_{yy} = 0$$

	$A = -y \sin x$	$B = \cos x$	$C = 0$	$B^2 - AC$
$(0, -1)$	0	1	0	$1^2 - 0 = 1 > 0 \rightarrow (0, -1)$ Eger N.
$(\pi, 1)$	0	-1	0	$(-1)^2 - 0 = 1 > 0 \rightarrow (\pi, 1)$ Eger N.

Ekstremum yok!
Cevap C