1) Uzaydaki bir parçacığın t anındaki konum vektörü $\vec{r}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t\,\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\vec{j}$ olmak üzere, $t = 0$ anında parçacığın hız vektörü ve ivme vektörü arasındaki açı aşağıdakilerden hangisidir?

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2,\ 0 \right\rangle$$

$$\downarrow$$

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 32t,\ 0 \right\rangle \rightarrow \vec{v}(0) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\rangle$$

$$\vec{r}\,''(t) = \vec{a}(t) = \langle 0, -32, 0 \rangle \rightarrow \vec{a}(0) = \langle 0, -32, 0 \rangle$$

$$|\vec{v}(0)| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 \qquad |\vec{a}(0)| = \sqrt{(-32)^2} = 32$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}(0)\cdot\vec{a}(0)}{|\vec{v}(0)|\cdot|\vec{a}(0)|} = \frac{-\cancel{32}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cancel{32}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Cevap D

---

2) $\vec{F}(t) = e^t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 3\ln(1-t)\,\vec{k}$ vektörel fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $[-1, 1]$
b) $(-\infty, 1]$
c) $(-\infty, 1)$
d) $(1, +\infty)$
e) $[1, +\infty)$

Bu üç fonk. tanımlı olması lazım

e^t ve $\sin t$ $\forall t \in \mathbb{R}$ için tanımlı

$\ln(1-t) \rightarrow 1-t>0 \rightarrow 1>t$ için tanımlı

O zaman $\vec{r}(t)$ $t<1$ yani

$t \in (-\infty, 1)$ için tanımlı

Cevap C

③ $\vec{r}(t) = (\underbrace{3t^2+1}_{x})\vec{i} + (\underbrace{4t^3-3}_{y})\vec{j} + (\underbrace{6t+2}_{z})\vec{k}$ eğrisinin $(4,1,8)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

$\vec{r}'(t) = \langle 6t, 12t^2, 6 \rangle \rightarrow$ teğet vektör $\rightarrow$ için

Hangi t için hesaplayacağız? $\leftarrow$

$(4,1,8) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = 3t^2+1 \\ 1 = 4t^3-3 \\ 8 = 6t+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t=1}$

$t=1$ için $\quad \vec{r}'(1) = \langle \underset{a}{6}, \underset{b}{12}, \underset{c}{6} \rangle \rightarrow$ Teğet vektör teğet doğru üstündedir (yön vektörü)

$\underset{x_0\ y_0\ z_0}{(4,1,8)} \longrightarrow \boxed{x = 4+6t \quad y = 1+12t \quad z = 8+6t}$

Cevap B

---

④ $\vec{r}(t) = \langle \overbrace{e^t\cos t}^{x}, \overbrace{e^t\sin t}^{y}, \overbrace{e^t}^{z} \rangle$ eğrisinin $0 \le t \le 1$ aralığındaki uzunluğunu veren integral aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\int_0^1 \sqrt{2}e^t\,dt$ $\quad$ b) $\int_0^1 \sqrt{3}e^t\,dt$ $\quad$ c) $\int_0^1 e^t \sin t \cos t\,dt$

Formül: $S = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$

$\frac{dx}{dt} = e^t\cos t - e^t\sin t \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t - 2e^{2t}\sin t\cos t$

$\frac{dy}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin t\cos t$

$\frac{dz}{dt} = e^t \Rightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = e^{2t}$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=3e^{2t}$$

$$S=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{3e^{2t}}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{3}\,e^t\,dt$$

Cevap B

---

⑤ $\vec{r}(t)=\underbrace{(1+t^2)^{3/2}}_{x}\vec{i}+\underbrace{(3-t^2)^{3/2}}_{y}\vec{j}+\underbrace{(4t^2)}_{z}\vec{k}$ eğrisinin $-1\leq t\leq 1$ aralığındaki uzunluğu?

a) 0 b) 5 c) 10 d) 15

$$S=\int_{-1}^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}\cdot(1+t^2)^{1/2}\cdot 2t \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=9(1+t^2)\cdot t^2$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}\cdot(3-t^2)^{1/2}\cdot(-2t) \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=9\cdot(3-t^2)\cdot t^2$$

$$\frac{dz}{dt}=8t \Rightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)^2=64t^2$$

$$+ \quad =9t^2+27t^2+64t^2=100t^2$$

$$S=\int_{-1}^1\sqrt{100t^2}\,dt=\int_{-1}^1 10|t|\,dt=\int_{-1}^0 -10t\,dt+\int_0^1 10t\,dt$$

$$=-5t^2\Big|_{-1}^0+5t^2\Big|_0^1=5+5=10$$

Cevap C

⑥ $f(x,y,z)=\frac{x}{y}-yz$ fonksiyonunun $P(4,1,1)$ noktasındaki yönlü türevlerinin max değeri A, min değeri B ise A, B = ?

a) $A=5$, $B=-5$

b) $A=\sqrt{27}$, $B=-\sqrt{27}$

c) $A=6$, $B=-6$

d) $A=\sqrt{10}$, $B=-\sqrt{10}$

$A=|\nabla f|$ $B=-|\nabla f|$ dir.

$$\nabla f=\langle f_x, f_y, f_z\rangle=\left\langle \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}-z, -y\right\rangle$$

$$\nabla f|_P=\langle 1,-5,-1\rangle \rightarrow |\nabla f|=\sqrt{1+(-5)^2+1}=\sqrt{27}$$

$$\Downarrow$$

$$A=\sqrt{27} \quad B=-\sqrt{27}$$

Cevap B

⑦ Hangi yönlerde $f(x,y)=xy$ fonksiyonunun $(2,0)$ daki yönlü türevi -1 olur?

$f(x,y)=xy \rightarrow \nabla f=y\vec{i}+x\vec{j}$ $\quad \nabla f|_{(2,0)}=2\vec{j}=\langle 0,2\rangle$

$\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ olsun. $\rightarrow \vec{u}$ birim $\rightarrow a^2+b^2=1$

$\nabla f|_P\cdot\vec{u}=-1 \Rightarrow 2b=-1$ $\boxed{b=-\frac{1}{2}}$ $\rightarrow a^2+\frac{1}{4}=1$

$a^2=\frac{3}{4} \rightarrow a=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cevap B

$\vec{u_1}=\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\vec{u_2}=\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$

(8) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$ olsun. Aşağıdaki şartlarda $\vec{u}$ yönlerini ve $D_u f|_{(1,-1)}$ değerini bulun.

a) $D_u f|_{(1,-1)}$ en büyük b) $D_u f|_{(1,-1)}$ en küçük

c) $D_u f|_{(1,-1)} = 0$

$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = (2x-y)\vec{i} + (-x+2y-1)\vec{j}$

$\nabla f|_{(1,-1)} = 3\vec{i} - 4\vec{j} = \langle 3,-4 \rangle$

a) $D_u f|_{(1,-1)}$ en büyük değerini ∇f yönündeki $\vec{u}$ birim vektörü ile alır. $\vec{u} = \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \rangle$ dir. Bu yöndeki türevin değeri $D_u f|_{(1,-1)} = |\nabla f| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \underline{\underline{5}}$

b) $D_u f|_{(1,-1)}$ en küçük değerini $-\nabla f$ yönünde alır. Yani $\vec{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ dir. $D_u f|_{(1,-1)} = -|\nabla f| = -5$ olur.

c) $D_u f|_{(1,-1)} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \nabla f|_{(1,-1)} = 0$ dır. $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ olsun.

$\langle a,b \rangle \cdot \langle 3,-4 \rangle = 0 \Rightarrow 3a - 4b = 0 \rightarrow a = \frac{4b}{3}$

$\vec{u}$ birim $\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\frac{16b^2}{9} + b^2 = 1$

$b^2 = \frac{9}{25}$ $\nearrow b = \frac{3}{5}$ $\searrow b = -\frac{3}{5}$

$\vec{u_1} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$

$\vec{u_2} = \langle -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \rangle$

yönlerinde türev 0 dır.

9

$$\vec{r}(t) = \overbrace{(1-2t^2)}^{f}\,\vec{i} + \overbrace{4t}^{g}\,\vec{j} + \overbrace{\left(3+2t^2\right)}^{h}\vec{k}$$ ile vektörel olarak tanımlanmış eğrinin

$0 \le t \le 2$ aralığındaki uzunluğunu veren integral aşağıdakilerden hangisidir?

(a) $\displaystyle\int_0^2 16\sqrt{t^2+2}\,dt$

$$S = \int_0^2 \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\,dt$$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{8t^4+4t^2}\,dt$

$f' = -4t \rightarrow (f')^2 = 16t^2$

$g' = 4 \rightarrow (g')^2 = 16$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{8t+4}\,dt$

$h' = 4t \rightarrow + \ (h')^2 = 16t^2$

$= \sqrt{32t^2+16}$

(d) $\displaystyle\int_0^2 4\underline{\sqrt{2t^2+1}\,dt}$

$= \sqrt{16(2t^2+1)}$

$= 4\sqrt{2t^2+1}$

(e) $\displaystyle\int_0^2 4\sqrt{t^2+1}\,dt$

10 $\vec{r}(t) = \overset{f}{\ln t}\,\vec{i} + \overset{g}{t}\,\vec{j} + \overset{h}{\frac{t^2}{4}}\,\vec{k}$ ile vektörel olarak tanımlanmış eğrinin $1 \le t \le 4$ aralığındaki uzunluğunu veren integral aşağıdakilerden hangisidir?

(a) $\displaystyle\int_1^4 \left(1 + \frac{1}{t^3} + \frac{t^2}{4}\right) dt$

(b) $\displaystyle\int_1^4 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt$

(c) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{2}\right) dt$

(d) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{t^4}{4} + \frac{1}{t^2} + \frac{t^6}{32}}\, dt$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t^2 + (\ln t)^2 + \frac{t^4}{16}}\, dt$

$$S = \int_1^4 \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\, dt$$

$$f' = \frac{1}{t} \rightarrow (f')^2 = +\frac{1}{t^2}$$

$$g' = 1 \rightarrow (g')^2 = 1$$

$$h' = \frac{t}{2} \rightarrow (h')^2 = \frac{t^2}{4}$$

$+$

$$\sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1 + \frac{t^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{t} + \frac{t}{2}\right)^2}$$

$$= \left|\frac{1}{t} + \frac{t}{2}\right|$$

$$S = \int_1^4 \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{2}\right) dt$$

11 $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun $P(2,2,2)$ noktasındaki $\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektörü yönündeki türevinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$|\vec{u}| = \sqrt{9+36+4} = 7 \rightarrow$ birim değil

$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7} \rangle \rightarrow$ yön

(a) 4

(b) $\frac{44}{7}$

(c) 44

(d) $-\frac{4}{7}$

(e) -4

$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle y+z, x+z, x+y \rangle$

$\nabla f|_P = \langle 4,4,4 \rangle$

$(D_v f)_P = \nabla f|_P \cdot \vec{v} = \langle 4,4,4 \rangle \cdot \langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7} \rangle$

$= \frac{12+24+8}{7} = \frac{44}{7}$

12 $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun $P(2,2,2)$ noktasındaki $\vec{u} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektörü yönündeki türevinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$|\vec{u}| = 7 \rightarrow$ birim değil

$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7} \rangle \rightarrow$ yön

$\nabla f = \langle y+z, x+z, x+y \rangle$

$\nabla f|_P = \langle 4,4,4 \rangle$

$(D_v f)_P = \nabla f|_P \cdot \vec{v} = \langle 4,4,4 \rangle \cdot \langle \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7} \rangle$

$= \frac{12-24+8}{7} = -\frac{4}{7}$

(a) 4

(b) $\frac{44}{7}$

(c) 44

(d) $-\frac{4}{7}$

(e) -4

12 $f(x,y,z)=x^2+y^4+z^3$ fonksiyonunun P $(1,1,1)$ noktasındaki farklı yönlerdeki yönlü türevlerini hesapladığımızda aşağıdaki değerlerden hangisi veya hangilerini elde etmemiz mümkündür?

I : -6 ✗ II : -4 ✓ III : 1 ✓ IV : 5 ✓ V : 7 ✗

(a) I, II, III, IV, V

(b) I, II, III, IV

(c) II, III, IV

(d) II, III

(e) Yalnız III

$$\underbrace{-|\nabla f|_P|}_{\text{min değer}} \leq \text{Yönlü Türev değeri} \leq \underbrace{|\nabla f|_P|}_{\text{max değer}}$$

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle 2x, 4y^3, 3z^2 \rangle$$

$$\nabla f|_P = \langle 2,4,3 \rangle$$

$$|\nabla f|_P| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29} = 5,\ldots$$

$$-\sqrt{29} = -5,\ldots \leq \text{Yönlü Türev} \leq \sqrt{29} = 5,\ldots$$

14

$f(x,y,z)=x^3+y^4+z^4$ fonksiyonunun $(1,1,1)$ noktasındaki farklı yönlerdeki yönlü türevlerini hesapladığımızda aşağıdaki değerlerden hangisi veya hangilerini elde etmemiz mümkündür?

$\mathrm{I}:-8 \quad \mathrm{II}:-4 \quad \mathrm{III}:1 \quad \mathrm{IV}:5 \quad \mathrm{V}:6$

(a) I, II, III, IV, V

(b) II, III, IV, V

(c) II, III, IV

(d) II, III

(e) Yalnız III

$$\underbrace{-|\nabla f|_p|}_{\text{min değer}} \leq \text{Yönlü Türev değeri} \leq \underbrace{|\nabla f|_p|}_{\text{max değer}}$$

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle 3x^2, 4y^3, 4z^4 \rangle$$

$$\nabla f|_p = \langle 3, 4, 4 \rangle$$

$$|\nabla f|_p| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41} = 6,\ldots$$

$$-\sqrt{41} = -6,\ldots \leq \text{Yönlü Türev} \leq \sqrt{41} = 6,\ldots$$

15) $f(x,y,z) = e^{xy+2z^2}$ fonksiyonunun $P(2,-1,-1)$ noktasındaki yönlü türevinin en büyük değeri kaçtır?

a) $\sqrt{21}$

b) $\sqrt{17}$

c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{20}$

e) $\sqrt{15}$

max yönlü türev $= |\nabla f|_P|$

$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$

$= \langle y \cdot e^{xy+2z^2},\ x e^{xy+2z^2},\ 4z\, e^{xy+2z^2} \rangle$

$\nabla f|_P = \langle -1, 2, -4 \rangle \rightarrow |\nabla f|_P| = \sqrt{1+4+16}$
$= \sqrt{21}$

16) $f(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2} + 3\ln(\ln z)$ fonksiyonunun $P(-\pi, 0, e^2)$ noktasında $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ yönündeki doğrultu türevinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{1}{e^2}$

b) $\frac{e^2+3}{3e^2}$

c) $\frac{e^2+1}{e^2}$

d) $\frac{e^2+1}{e}$

e) $\frac{3}{e^2}$

$(D_u f)_P = \nabla f|_P \cdot \vec{u}$ ↳ Birim vektörü

$\vec{v} = \langle 1, -2, 2 \rangle \rightarrow |\vec{v}| = 3 \rightarrow \vec{u} = \frac{v}{|\vec{v}|} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$

$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$

$= \langle \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2},\ 3 \cdot \frac{\frac{1}{z}}{\ln z} \rangle$

$\downarrow x = -\pi \quad y = 0 \quad z = e^2$

$= \langle \frac{-\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \cdot \underbrace{\cos\pi}_{-1}, 0, \frac{3}{2e^2} \rangle = \langle 1, 0, \frac{3}{2e^2} \rangle$

$D_u f = \frac{1}{3} + \frac{1}{e^2} = \frac{e^2+3}{3e^2}$

17

$f(x,y,z)=x^3+\sqrt{6}y^2+z^4$ fonksiyonunun $P(1,1,1)$ noktasındaki yönlü türevinin en büyük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(a) $4\sqrt{6}$

(b) $\sqrt{31}$

(c) 6

(d) 7

(e) 8

$\boxed{\max = |\nabla f|_P|}$

$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle = \langle 3x^2, 2\sqrt{6}\,y, 4z^3\rangle$

$\downarrow x=y=z=1$

$\nabla f|_P = \langle 3, 2\sqrt{6}, 4\rangle \rightarrow |\nabla f| = \sqrt{9+24+16} = 7$

18 $f(x,y)=e^x(\sin y+\cos y)$ fonksiyonu için $f_{xy}(x,y)-f_{yy}(x,y)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

(a) $-2e^x\sin y$

(b) $-2e^x\cos y$

(c) 0

(d) $2e^x\sin y$

(e) $2e^x\cos y$

$f_x = e^x.(\sin y+\cos y)$

$\downarrow$

$* \; f_{xy} = e^x.(\cos y-\sin y)$

$f_y = e^x.(\cos y-\sin y)$

$\downarrow$

$* \; f_{yy} = e^x.(-\sin y-\cos y)$

$f_{xy}-f_{yy} = e^x\cos y - \cancel{e^x\sin y} + \cancel{e^x\sin y} + e^x\cos y$

$= 2e^x\cos y$