POZİTİF SERİLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

① İntegral Testi:

İntegral testi; pozitif terimli bir serinin, ona benzer şekilde davranan bir improper integralle karşılaştırmak suretiyle, yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirlememize yardımcı olur.

Teorem: f fonksiyonu, bir pozitif N tamsayısı için, $[N,\infty)$ aralığında pozitif, sürekli ve azalan bir fonksiyon olmak üzere $a_n = f(n)$ olsun. O zaman:

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ ve $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ nin her ikisi ya yakınsaktır ya da $+\infty$'a ıraksar.

NOT: f, $[N,\infty)$ da pozitif, sürekli ve azalan bir fonk. ise ve $a_n = f(n)$ ise Teorem bize $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ ve $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ nin her ikisinin ya yakınsadığını ya da $+\infty$'a ıraksadığını garanti eder. Fakat bize serinin toplamının integralin değerine eşit olduğunu söylemez!!

⊛ Harmonik serinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Harmonik Seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisidir.

$f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. f, $[1,\infty)$ da sürekli, pozitif ve azalandır $\left(f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\right)$

Yani integral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \underbrace{\ln 1}_{0}) = +\infty \rightarrow \text{improper integral ıraksaktır}$$

O halde integral testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi de ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ olsun. f, $[1,\infty)$ da sürekli, pozitif ve azalandır. $\left(f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0\right)$

Dolayısıyla integral testi kullanılabilirdir.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \text{Arctan}x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\text{Arctan}\,R}_{\pi/2} - \underbrace{\text{Arctan}\,1}_{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

İmproper integral yakınsaktır. İntegral testine göre seri de yakınsaktır.

---

② Mukayese Testi:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$, terimleri negatif olmayan iki seri olsun.

a) Eğer her n için $a_n \le b_n$ ise ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise, $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

$$a_n \le b_n \Rightarrow \sum a_n \le \underbrace{\sum b_n}_{\text{Yakınsak}}$$

Yakınsak

---

b) Eğer her n için $a_n \ge b_n$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

$$a_n \ge b_n \Rightarrow \sum a_n \ge \underbrace{\sum b_n}_{\text{ıraksak}}$$

ıraksak

★ p-Serisi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$ serisine p serisi denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ → $p > 1$ ise seri yakınsaktır.
→ $p \le 1$ ise seri ıraksaktır.

* Mukayese testi için genel olarak seçilen seri ya geometrik seri, ya harmonik seri ya da p-serisidir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}}_{\substack{p\text{-serisi} \\ p=2>1 \\ \text{yakınsaktır}}} \Rightarrow \sum \frac{4}{n^2} \text{ yakınsak olduğundan}$$

Mukayese testine göre $\sum \frac{3n+1}{n^3+1}$ de yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisinin karakterini inceleyin.

$\boxed{\text{* } n=1,2,3,\ldots \text{ için } \ln n < n \text{ dir } (n < e^n \Rightarrow \ln n < n).}$

Her $n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Harmonik seri, ıraksaktır.}}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan mukayese testine göre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ de ıraksaktır.

③ Limit Testi:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$, pozitif terimli iki seri olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \text{ olsun.}$$

a) $L \neq 0, \infty$ ise her iki seri de aynı karakterlidir.

b) $L = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

c) $L = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisini seçelim. $p = \frac{1}{2} < 1$ seri ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{iki seri aynı karakterli.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak olduğundan Limit Testine göre $\sum \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ de ıraksaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ($p = 3 > 1$ yakınsak) serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^3}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \Bigg[\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{1}\Bigg]^3 = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow$$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ de yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Harmonik seri, ıraksaktır) serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{(n+1)^2} = 2 \neq 0, \infty$$ ⇒ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ de ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$ serisinin karakteri?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{Geometrik seri}}$$

$a = \frac{1}{e}$

$r = \frac{1}{e} < 1$ yakınsak seri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^n \cdot \sqrt{n}}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$ ⇒ Limit Testine göre $\sum \frac{1}{e^n}$ yakınsak olduğun-

dan $\sum \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$ de yakınsaktır.

---

4) Oran Testi:

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun.

a) $L < 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır

b) $L > 1$ " " ıraksaktır

c) $L = 1$ ise bu test sonuç vermez. Başka test denenmeli.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{99^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{99^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{99^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{99^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1}$$

$= 0 < 1 \Rightarrow$ Oran Testine göre seri yakınsaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{\frac{n}{n+1}}{1} = 2 > 1 \Rightarrow$$ Oran Testine göre ıraksak

---

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)^{n+1}}^{(n+1)^n}}{\cancel{(n+1)!}_{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$= e > 1 \Rightarrow$ Oran Testine göre ıraksaktır

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}}{1} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$$ Oran T. göre yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(2n+2)!}^{(2n+2)(2n+1).\cancel{(2n)!}}}{\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}\,\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2).(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1 \Rightarrow$$ Oran T. göre seri ıraksak.

⑤ Kök Testi

$\sum a_n$, terimleri negatif olmayan bir seri ve

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

a) $L < 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

b) $L > 1$ ise " " ıraksaktır.

c) $L = 1$ ise bu test sonuç vermez. Başka test denenmeli.

(*) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$ karakteri?

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{(\ln k)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1 \Rightarrow$$ Kök testine göre seri yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$$ Kök T. göre seri yakınsaktır

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{1+\frac{5}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{5}{2^n}}_{0}\right)^{\overbrace{1/n}^{0}} = \frac{2}{3} < 1$$

$\downarrow$

Kök T. göre seri yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1})^2} = 2 > 1$$

Kök T. göre ıraksak

---

⑥* n. Terim Testi;

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \text{Test Sonuç vermez}$$

n. Terim testini kullanırsak:

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

ALTERNE SERİLER

Terimlerinin bir kısmı negatif bir kısmi ise pozitif sayılardan oluşan serilere "değişik işaretli seri" denir.

* Özel olarak; serinin terimleri sırasıyla bir pozitif bir negatif olan seriye "alterne seri" denir. Genel olarak bir alterne seri; $\forall n=1,2,3,\ldots$ için $a_n>0$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$$ şeklindedir.

---

* Alterne Seri Testi

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ alterne seri olsun.

1. $a_n>0$ $(\forall n=1,2,3,\ldots$ için$)$
2. $a_{n+1}\leq a_n$ $(\forall n=1,2,3,\ldots$ için$)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

şartları sağlanıyorsa alterne seri yakınsaktır.

---

* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

1. $a_n=\frac{1}{n^2+1}>0$ $(\forall n=1,2,3,\ldots$ için$)$ ✓
2. $\frac{1}{(n+1)^2+1}<\frac{1}{n^2+1}\Rightarrow a_{n+1}<a_n$ ✓
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ ✓

3 şart da sağlandığından Alterne Seri Testine göre seri yakınsaktır.

Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Pozitif Terimli Seri → Yakınsak, Iraksak

Alterne Seri → Yakınsak, Iraksak

Yakınsak → Mutlak Yakınsak, Şartlı Yakınsak

Mutlak Yakınsaklık:

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin "mutlak yakınsak" olduğu söylenir.

☆ Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır.

Şartlı Yakınsaklık:

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin "şartlı yakınsak" olduğu söylenir.

NOT 1: Pozitif terimli serilerdeki testler (integral, limit, oran, ...) mutlak yakınsaklığı test etmek için kullanılır. Bu testler $\sum |a_n|$ serisine uygulanmalıdır. ☆

NOT 2: Mutlak olmayan yakınsaklığı göstermek için "Alterne Seri Testi" kullanılır. ☆

Alterne Harmonik Seri: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ serisine alterne harmonik seri denir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ alterne harmonik serisinin yakınsaklığını inceleyip türünü belirtiniz.

① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisi harmonik seridir ve ıraksaktır. O halde

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ mutlak yakınsak değildir.

② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ şartlı yakınsak mı? Alterne Seri Testi uygulayalım.

a) $a_n=\frac{1}{n}>0$ ✓

b) $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1}<a_n$ ✓

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ✓

Seri yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak değildir. O halde Şartlı Yakınsaktır.

(**) Alterne Harmonik Seri şartlı yakınsak bir seridir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.\operatorname{Cos}n\pi}{2^n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.\operatorname{Cos}n\pi}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{2^n}$

① Mutlak yakınsak mı?

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ yakınsak mı? Oran Testini kullanalım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$$

Oran Testine göre $\sum\frac{n}{2^n}$ yakınsaktır.

O halde $\sum(-1)^n\frac{n}{2^n}$ mutlak yakınsaktır.

⊛ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$ mutlak / şartlı yakınsak mı?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

① $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow$ $\sum \frac{1}{\ln n}$ yakınsak mı?

Mukayese testini kullanalım.

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Harmonik seri ıraksak}}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ de ıraksaktır. (Mukayese Testine göre). O halde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ mutlak yak. değildir.

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ şartlı yakınsak mı?

a) $a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$ ✓

b) $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ✓

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ ✓

} Alterne seri testine göre seri yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

⊛ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 . \ln k}$ serisinin yakınsaklık türünü belirleyiniz.

① Mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ yakınsak mı?

Limit Testini kullanalım. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ($p=2>1$ yakınsak) serisini seçelim.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \Rightarrow$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan limit testine göre $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi de yakınsaktır.

O halde $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \ln k}$ mutlak yakınsaktır.

Serilerde Terimlerin Yeniden Düzenlenmesi (Sıralanması)

Mutlak ve şartlı yakınsak seriler arasındaki temel fark; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak olarak yakınsak ise o zaman yakınsar. Eğer seriyi yakınsak yapmak için kısaltmalar yapmak gerekiyorsa seri sadece şartlı olarak yakınsar.

* Eğer bir seri mutlak yakınsak ise: o zaman pozitif terimlerden oluşan alt seri ve negatif terimlerden oluşan alt serinin herbiri, sonlu bir toplama yakınsamalıdır.

* Eğer bir seri şartlı yakınsak ise: pozitif ve negatif terimlerden oluşan alt serilerin her ikisi de ıraksar; sırasıyla $+\infty$ ve $-\infty$'a.

Soru: Eğer verilen yakınsak bir serinin terimlerini farklı bir sıralamayla toplanacak şekilde yeniden düzenlersek, bu yeni düzenlenmiş seri yakınsar mı? Eğer yakınsarsa verilen orjinal serinin toplamına mı yakınsar?

Cevap orjinal serinin mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadığına bağlıdır.

Bir Dizinin Yeniden Sıralanması ve Yakınsaklığı

a) Eğer mutlak yakınsak bir serinin terimleri farklı bir olacak şekilde yeniden düzenlenirse, bu yeni düzenlenmiş seri orjinal serinin yakınsadığı toplama yakınsar.

b) Eğer bir seri şartlı olarak yakınsaksa ve eğer L herhangi bir reel sayı ise, o zaman serinin terimleri L toplamına (şartlı olarak) yakınsayacak şekilde yeniden düzenlenebilir. Aynı terimler toplamı $+\infty$ veya $-\infty$'a ıraksayacak şekilde ya da sadece ıraksayacak şekilde sıralanabilir.